Wahrscheinlichkeitstheorie des Marktes

Timm Gudehus, Hamburg

Auf einem Markt für ein Wirtschafts- oder Finanzgut begegnen Nachfrager mit unterschiedlicher Zahlungsbereitschaft, Mengenbedarf und Qualitätsanforderungen Anbietern mit verschiedenen Angebotsgrenzpreisen, Mengen und Qualitäten. In diesem Beitrag wird gezeigt, wie sich Mittelwerte und Streuungen der kollektiven Marktergebnisse, wie Marktpreis und Marktabsatz, sowie deren Verteilung auf die Akteure und die zeitliche Veränderung bei gegebener *Preis- und Mengenbildung* mit Hilfe der *Wahrscheinlichkeitstheorie* aus den *Besuchsfrequenzen* und den *Verhaltensfunktionen* der Akteure berechnen lassen. Damit ist es möglich, die Gesetze dynamischer Märkte für realistische Marktbedingungen, verschiedene Wettbewerbskonstellationen und unterschiedliches Verhalten der Akteure herzuleiten.

Wegen der Vielzahl möglicher Marktkonstellationen und der mit Anzahl der Akteure zunehmenden Komplexität beschränkt sich der Beitrag auf das grundlegende Instrumentarium der Wahrscheinlichkeitstheorie des Marktes, mit dem für ausgewählte Marktkonstellationen und einfache Verhaltensfunktionen explizite Berechnungsformeln hergeleitetet und Modellrechnungen durchgeführt werden. Die wahrscheinlichkeitstheoretischen Ergebnisse stimmen im Rahmen der statistischen Genauigkeit mit den Ergebnissen entsprechender Simulationsrechnungen überein (vgl. [Gudehus 2007]). Sie weichen jedoch erheblich von den Aussagen der klassischen Markt- und Preistheorien ab, die mit der üblichen Annahme eines “vollkommenen Marktes“ von einer wirklichkeitsfremden Preis- und Mengenbildung ausgehen (s. z.B. [Mankiw 2003; Ruffieux 2004; Samuelson 1995; Schneider 1969; Varian 1993, Wöhe 2000]).

Nachfragerstrom und Nachfragerverhalten

Die *Besuchsfrequenz* der *Nachfrager* N auf einem Markt ist zu einer Zeit t gegeben durch einen einlaufenden *Nachfragerstrom* $\lambda_N(t)$ [N/PE], der einmalig, sporadisch oder regelmäßig, zeitlich begrenzt oder länger anhaltend, getaktet oder stochastisch, zufällig gemischt oder geordnet, stationär oder zeitlich veränderlich sein kann (vgl. [Ferschl 1964, S. 42ff.]). Intensität, Reihenfolge und zeitlicher Verlauf des Nachfragerstroms sind vom Wirtschaftsgut, von der Reichweite des Marktes, von den Beschaffungsstrategien und der Markteinschätzung der Nachfrager sowie von anderen Einflußfaktoren abhängig. Das *Marktverhalten* der *Nachfrager* ist mathematisch darstellbar durch eine *Nachfragerverhaltensdichte* $w_N(p;m;q;t)$, die wie folgt definiert ist:

- Das Produkt $w_N(p;m;q;t)\cdot dp\cdot dm\cdot dq$ der Nachfragerverhaltensdichte mit den Differenzialen dp, dm und dq ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Zahlungsbereitschaft, d.h. der Grenzpreis eines zur Zeit t eintreffenden Nachfragers im Intervall (p;p+dp), seine Bedarfsmenge im Intervall (m;m+dm) und seine Qualitätsanforderungen im Intervall (q;q+dq) liegen.

Die Verhaltensdichte kennzeichnet das aktuelle Nachfragerverhalten, das sich im Verlauf der Zeit ändern kann. Nachfragerstrom, Verhaltensdichte und deren Zeitverlauf werden zunächst als stationär angenommen und die Zeitvariable t weggelassen. Für dynamische Märkte mit veränderlicher Nachfrage und/oder veränderlichem Angebot treten in den nachfolgenden Beziehungen an die Stelle der konstanten Ströme und Dichten die zeitabhängigen Ströme $\lambda_N(t)$ und $\lambda_A(t)$ bzw. die zeitlich veränderliche Verhaltensdichten $w_N(p;m;q;t)$ und $w_A(p;m;q;t)$. Auf diese Weise lassen sich u.a. *Rückkopplungseffekte* und deren Auswirkungen auf das Marktgeschehen berechnen. Zur Veranschaulichung zeigt *Abb. 1* verschiedene *Preisverhaltensdichten* der Nachfrage.

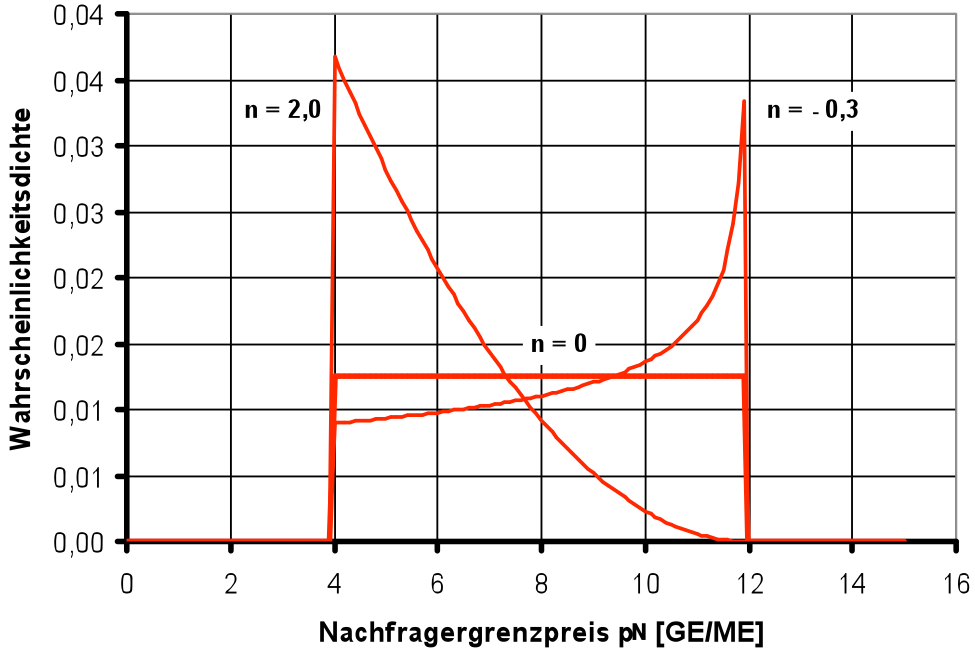

Abb. 1 Standarddichtefunktionen der Nachfragepreisverteilung

Parameter: p_{Nu} = 4 GE/ME, p_{No} = 12 GE/ME

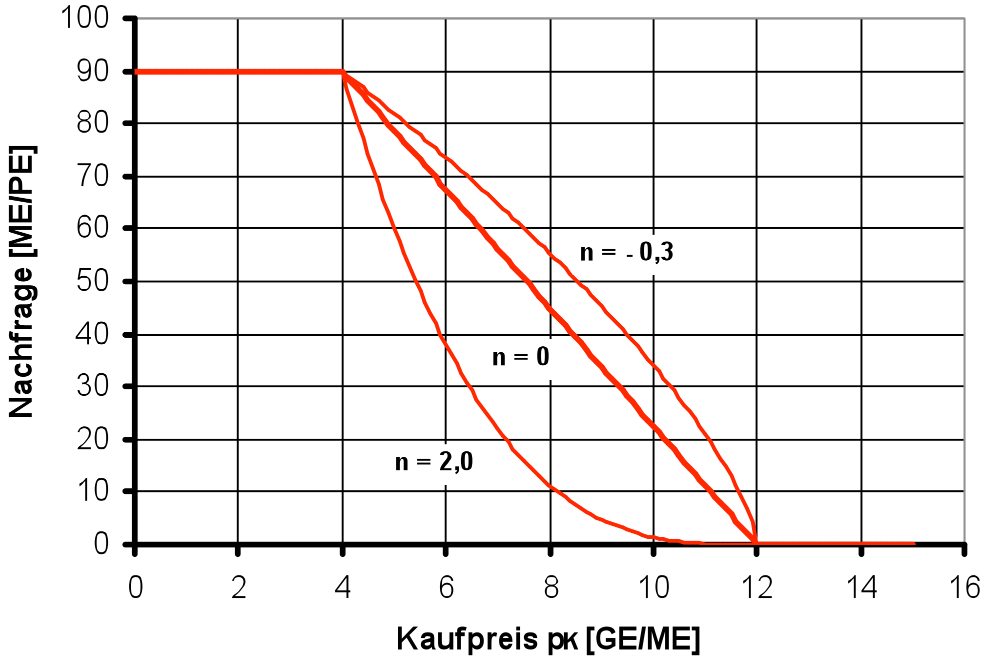

Abb. 2 Preisnachfragefunktionen für unterschiedliche Standarddichten

Parameter: λ_N = 50 N/PE; m_{Nm} = 1,8 ME/N, Λ_N = 90 ME/PE, übrige s. Abb. 1

Die über dem *p-m-q-Zustandsraum der Nachfrage* definierten Verhaltensdichten erfüllen zu jeder Zeit t die allgemeine *Normierungsbedingung*:

$$\int dp \int dm \int dq \; w_N(p;m;q) \; = \; 1 \qquad (1)$$

Wenn nichts anderes angegeben ist, erstrecken sich die Integrale stets von 0 bis ∞, da Preise, Mengen und Qualitätsmerkmale nur positive Werte haben. Aus der Verhaltensdichte ergeben sich die Nachfragekennwerte, wie *Mittelwert* und *Einzelvarianz* der *Bedarfsmengen*

$$m_{Nm} \; = \; \int dp \int dm \int dq \; w_N(p;m;q) \cdot m \qquad (2)$$

$$s_{mN}{}^2 \; = \; \int dp \int dm \int dq \; w_N(p;m;q) \cdot (m\text{-}m_{Nm})^2 \qquad , \qquad (3)$$

Mittelwert und *Einzelvarianz* der mengengewichteten *Nachfragergrenzpreise*:

$$p_{Nm} \; = \; \int dp \int dm \int dq \; w_N(p;m;q) \cdot p \cdot m/m_{Nm} \qquad (3)$$

$$s_{pN}{}^2 \; = \; \int dp \int dm \int dq \; w_N(p;m;q) \cdot (p\text{-}p_{Nm})^2 \cdot m/m_{Nm} \qquad , \qquad (4)$$

sowie *Mittelwert* und *Einzelvarianz* der mengengewichteten *Qualitätsanforderungen*:

$$q_{Nm} \; = \; \int dp \int dm \int dq \; w_N(p;m;q) \cdot q \cdot m/m_{Nm} \qquad (6)$$

$$s_{qN}{}^2 \; = \; \int dp \int dm \int dq \; w_N(p;m;q) \cdot (q\text{-}q_{Nm})^2 \cdot m/m_{Nm} \qquad (7)$$

Ein Nachfragerstrom λ_N [N/PE] mit der Verhaltensdichte $w_N(p;m;q)$ und den Bedarfsmengen m erzeugt einen Mengenstrom, der sich zusammensetzt aus der *Nachfragestromdichte*

$$\Lambda_N(p;m;q) = w_N(p;m;q) \cdot \lambda_N \cdot m. \qquad (8)$$

Das Integral der Nachfragestromdichte über alle Preise, Mengen und Qualitäten ist der *Nachfragemengenstrom* oder *Periodenbedarf*:

$$\Lambda_N \; = \; \int dp \int dm \int dq \; \Lambda_N(p;m;q) = \; \lambda_N \cdot m_{Nm} \qquad [\text{ME/PE}] \; . \qquad (9)$$

Nach dem Gesetz der großen Zahl nähert sich die Verteilung der *Periodenmittelwerte* einer zufallsverteilten Größe x mit der Einzelvarianz $s_x{}^2$ mit steigender Anzahl der Ereignisse pro Periode, d.h. mit zunehmendem *Ereignisstrom* λ [1/PE], einer *Normalverteilung* mit der *Periodenvarianz* (s. z.B. [Bauer 1991; Kreyszig 1975]):

$$s_x{}^2(\lambda) = s_x{}^2/\lambda \qquad \text{für } x = p, m, q\ldots \qquad (10)$$

Damit lassen sich aus den theoretischen Einzelvarianzen $s_x{}^2$ und dem Strom λ der Ereignisse mit dem Kennwert x die *Periodenvarianzen* $s_x{}^2(\lambda)$ berechnen, z.B. um sie mit Simulationswerten zu vergleichen. Die *Periodenvarianz des Mengenstroms* (9) ergibt sich nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz aus der *Ereignisvarianz* s_λ und der *Einzelmengenvarianz* (3) mit der Beziehung [Georgii 2004; Ferschl 1964]:

$$s_\Lambda{}^2 = \; m^2 \cdot s_\lambda{}^2 + \; \lambda^2 \cdot s_m(\lambda)^2 \; = \; m^2 \cdot s_\lambda{}^2 + \; \lambda \cdot s_m{}^2 \; . \qquad (11)$$

Bei voneinander unabhängigem stochastischem Einzelzulauf ist die Ereignisvarianz $s_\lambda = \sqrt{\lambda}$, bei getaktetem Zulauf ist sie $s_\lambda = 0$. Die Annäherung an eine Normalverteilung, die Beziehung (10) für die Periodenvarianz und die Abhängigkeit (11) der Mengenstromvarianz von der Ereignisvarianz und Einzelmengenvarianz werden für Ströme mit unterschiedlichsten Verteilungen durch *Simulationsrechungen* bestätigt.

Die Zufallschwankungen und die Unkorreliertheit der Marktbesuche sowie das undeterminierte Verhalten der Akteure sind Ursachen der *Marktstochastik* [Georgii 2004, Gudehus 2007]. Aufgrund der Beziehungen (10) und (11) ist die *Volatilität* s_X/X_m der Marktergebnisse X, d.h. die *Unschärfe des Marktes*, umso größer, je kürzer die Beobachtungsperioden sind.

Vom Gesamtmengenstrom (9) kann bei Begegnungen mit Anbietern nur der Anteil zu einem Kauf führen, der alle *Kaufbedingungen* für Preis, Menge und Qualität erfüllt. Das Integral der Stromdichte (8) über die kaufwirksamen Preis-, Mengen- und Qualitätsbereiche ist die allgemeine *Nachfragefunktion* $\Lambda_N(p_K;m_K;q_K;t)$, die über dem p_K-m_K-q_K-Zustandsraum definiert ist.

Auch wenn alle Nachfrager die Kaufbedingungen für Menge und Qualität erfüllen, kann nur der Anteil des Nachfragemengenstroms zum Kauf führen, dessen Grenzpreise größer oder gleich dem Kaufpreis sind. Der bei *Kaufpreisen* ab p_K kaufwirksame Nachfragemengenstrom ergibt sich aus der Stromdichte (8) durch Integration über alle Preise $p \geq p_K$ sowie über alle Mengen und Qualitäten von 0 bis ∞:

$$\Lambda_N(p_K) \;=\; \lambda_N \cdot \int_{p_K}^{\infty} dp \int_0^{\infty} dm \int_0^{\infty} dq \cdot m \cdot w_N(p;m;q)\,. \tag{12}$$

Diese *Preisnachfragefunktion* ist gleich der *herkömmlichen Nachfragefunktion*. Sie hat, wie *Abb. 2* für die Preisverteilungsdichten aus *Abb. 1* zeigt, bei $p_K = 0$ den Gesamtwert Λ_N und fällt mit steigendem Kaufpreis $p_K \to \infty$ bis zum Wert 0. Entsprechend ergibt die Integration der Stromdichte (8) über alle Qualitäten $q \leq q_K$ sowie über alle Preise und Mengen die *Qualitätsnachfragefunktion* $\Lambda_N(q_K)$, die ab der untersten Qualitätserwartung q_{Nu} von 0 ansteigt bis zur Gesamtnachfrage bei der höchsten Qualitätserwartung q_{No}.

Preisverhalten, Mengenverhalten und Qualitätsverhalten eines Nachfragers sind häufig voneinander abhängig. So steigt bei einigen Gütern und Nachfragern die Zahlungsbereitschaft mit der Qualität. Bei Nachfragern mit begrenztem Budget fällt die Nachfragemenge mit dem Kaufpreis. Nur wenn Preis-, Mengen- und Qualitätsverhalten voneinander unabhängig sind, ist die Nachfragerverhaltensdichte ein Produkt $w_N(p;m;q) = w_N(p) \cdot w_N(m) \cdot w_N(q)$ der *partiellen Nachfragedichten* $w_N(p)$, $w_N(m)$, $w_N(q)$ von Preis, Menge und Qualität.

Anbieterstrom und Anbieterverhalten

Die *Besuchsfrequenz* der *Anbieter* A zur einer Zeit t ist gegeben durch einen einlaufenden *Anbieterstrom* $\lambda_A(t)$ [A/PE], der ebenso wie der Nachfragerstrom einmalig, sporadisch oder regelmäßig, zeitlich begrenzt oder länger anhaltend, getaktet oder stochastisch, zufällig gemischt oder geordnet, stationär oder zeitlich veränderlich sein kann. Das *Marktverhalten* der *Anbieter* ist durch eine *Anbieterverhaltensdichte* $w_A(p;m;q;t)$ darstellbar mit der Definition:

- Das Produkt $w_A(p;m;q;t) \cdot dp \cdot dm \cdot dq$ der Anbieterverhaltensdichte $w_A(p;m;q;t)$ mit den Differenzialen dp, dm und dq ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Angebotsgrenzpreis eines zur Zeit t eintreffenden Anbieters im Intervall (p;p+dp), seine Angebotsmenge im Intervall (m;m+dm) und sein Qualitätsangebot im Intervall (q;q+dq) liegen.

Zur Veranschaulichung zeigt *Abb. 3* verschiedene Standardverhaltensdichten des Angebots. Die das Anbieterverhalten kennzeichnende Verhaltensdichte sowie Intensität, Reihenfolge und zeitlicher Verlauf des Anbieterstroms hängen vom Wirtschaftsgut, vom Markt, von den Absatzstrategien und der Markteinschätzung der Anbieter sowie von vielen anderen Einflußfaktoren ab. Auch Zustrom und Verhaltensdichte der Anbieter und deren Zeitverlauf werden zunächst als stationär angenommen.

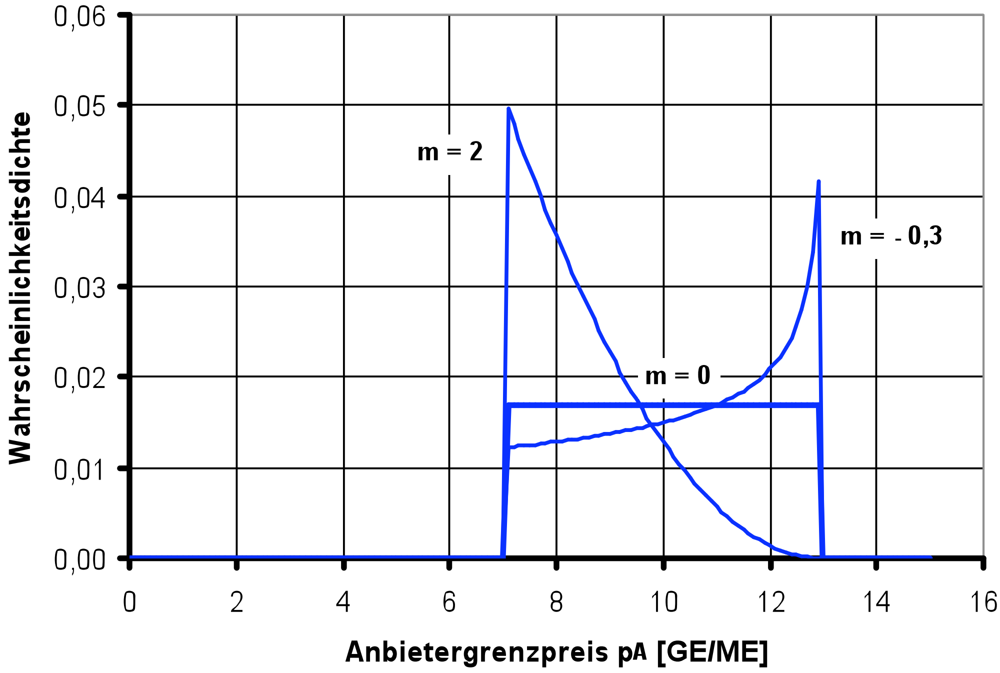

Abb. 3 Standarddichtefunktionen der Angebotspreisverteilung

Parameter: $p_{Au} = 7$ GE/ME, $p_{Ao} = 13$ GE/ME

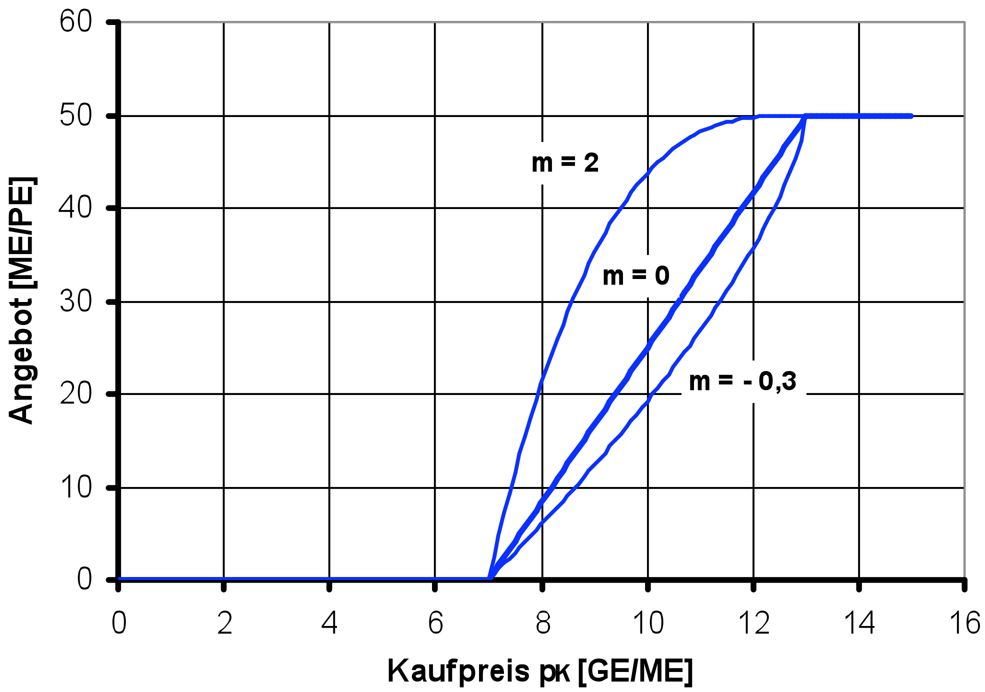

Abb. 4 Preisangebotsfunktionen für unterschiedliche Standarddichten

Parameter: $\lambda_A = 10$ N/PE; $m_{Am} = 5$ ME/N, $\Lambda_A = 50$ ME/PE, übrige s. *Abb. 3*

Die *Anbieterverhaltensdichte* $w_A(p;m;q)$ ist über dem *p-m-q-Zustandsraum* des Angebots definiert. Auch für sie gelten, mit Index A statt N, die *Normierungsbedingung* (1), die Gleichungen (2) bis (7) für die Mittelwerte und Einzelvarianzen der Preise, Mengen und Qualität sowie die Beziehungen (8) bis (10) für die Angebotsstromdichte $\Lambda_A(p;m;q)$, den Angebotsmengenstrom Λ_A und die Periodenvarianzen der Angebotskennwerte.

Vom gesamten Angebotsmengenstrom ist bei einer Begegnung mit einem Nachfrager nur der Anteil kaufwirksam, der bezüglich Preis, Menge und Qualität die *Kaufbedingungen* erfüllt. Die Integration der Angebotsstromdichte $\Lambda_A(p;m;q)$ über alle zulässigen Preis-, Mengen- und Qualitätsbereiche ergibt die allgemeine *Angebotsfunktion* $\Lambda_A(p_K;m_K;q_K)$, die ebenfalls über dem dreidimensionalen p_K-m_K-q_K-Zustandsraum definiert ist.

Auch wenn alle Anbieter die Mengen- und Qualitätsbedingungen erfüllen, führt nur der Anteil des Angebotsmengenstroms mit Angebotsgrenzpreisen p zum Kauf, die kleiner oder gleich dem Kaufpreis sind. Der bei Preisen bis p_K wirksame Anteil des Angebotsmengenstroms ist die *Preisangebotsfunktion*, die aus der Angebotsstromdichte durch Integration über alle Preise $p \leq p_K$ sowie über alle Mengen und Qualitäten von 0 bis ∞ folgt:

$$\Lambda_A(p_K) \;=\; \lambda_A \cdot \int_0^{p_K} dp \int_0^{\infty} dm \int_0^{\infty} dq \cdot m \cdot w_A(p;m;q)\,. \qquad (13)$$

Die Preisangebotsfunktion ist gleich der herkömmlichen *Angebotsfunktion*. Sie steigt, wie in *Abb. 4* für die Preisverteilungsdichten aus *Abb. 3* gezeigt, vom Wert 0 bei $p_K = 0$ mit zunehmendem Kaufpreis $p_K \to \infty$ bis zum Gesamtangebotsstrom Λ_A. Entsprechend ergibt die Integration der Angebotsstromdichte $\Lambda_A(p;m;q)$ über alle Qualitäten $q \geq q_K$ sowie über alle Preise und Mengen die *Qualitätsangebotsfunktion* $\Lambda_A(q_K)$, die ab dem untersten Qualitätsangebotswert q_{Nu} vom Gesamtangebot Λ_A bis zum höchsten Qualitätsangebotswert q_{No} auf 0 abfällt

Auch Preisverhalten, Mengenverhalten oder Qualitätsverhalten der Anbieter sind häufig voneinander abhängig. So steigen bei vielen Gütern die Kosten und damit die Angebotsgrenzpreise mit der Qualität. Bei Massengütern fallen die Kosten und Preise mit der Verkaufsmenge. Nur wenn Preisverhalten, Mengenverhalten und Qualitätsverhalten der einzelnen Anbieter voneinander unabhängig sind, ist die Angebotsverhaltensdichte ein Produkt $w_A(p;m;q) = w_P(p)\cdot w_M(m)\cdot w_Q(q)$ der *partiellen Angebotsdichten* von Preis, Menge und Qualität.

Modellverhaltensfunktionen

Zur Veranschaulichung und für Modellrechnungen wird für Nachfrage und Angebot mit einer *Modellverhaltensfunktion* $w_M(p;m;q)$ gerechnet, die ein Produkt

$$w_M(p;m;q) = w_S(p) \cdot w_S(m) \cdot w_S(q) \qquad \text{für} \quad M = N \text{ und } A \qquad (14)$$

von *Standarddichtefunktionen*

$$w_S(x) \;=\; \text{WENN}(x<x_u;\ 0;\ \text{WENN}(x>x_o;\ 0;\ (n+1)\cdot(x_o-x)^n/(x_o-x_u)^{n+1})) \qquad (15)$$

für x = p, m, q ist mit dem *Kurvenparameter* $n > -1$. Wie die *Abb. 1* und *3* für verschiedene Preisverteilungsdichten zeigen, ist die Standarddichtefunktion (15) im einfachsten Fall mit $n = 0$ eine Gleichverteilung der Werte x zwischen einem *unteren Wert* x_u und einem *oberen Wert* x_o. Für Kurvenparameter $n > 0$ fällt die Standarddichteverteilung nach rechts unten. Für Werte aus dem Intervall $-1 < n < 0$ steigt sie nach rechts oben. Bei veränderlichem Verhalten der Akteure sind die Grenzwerte zeitabhängig, also $x_u = x_u(t)$ und $x_o = x_o(t)$.

Wenn die Verteilungen von $x = p, m, q$ durch Standarddichtefunktionen (15) darstellbar sind, sind die Integrale (2) bis (7) explizit lösbar. Für *Mittelwert* x_m und *Varianz* s_x gilt dann:

$$x_m = ((n+1)\cdot x_u + x_o)/(n+2) \tag{16}$$

$$s_x^2 = (x_o - x_u)^2\cdot(n+1)/((n+2)(n+3)). \tag{17}$$

Für $n = 0$ ist der Mittelwert $(x_o+x_u)/2$ und die Varianz $(x_u-x_o)^2/6$. Für $n \to \infty$ nähert sich der Mittelwert dem unteren Grenzwert x_u und für $n \to -1$ dem oberen Grenzwert x_o. In beiden Grenzfällen wird die Dichteverteilung immer schmaler und die Varianz geht gegen 0.

Mit der Modellverhaltensfunktion (14) ergibt das Integral (12) die abfallen *Standard-Preisnachfragefunktion* mit dem Parameter $n > -1$: (18)

$$\Lambda_N(p_K) = \mathrm{WENN}(p_K<p_{Nu};\ 1\ ;\ \mathrm{WENN}(p_K>p_{No};\ 0;\ ((p_{No}-p_K)/(p_{No}-p_{Nu}))^{n+1}))\cdot\Lambda_N = W_N(p_K)\cdot\Lambda_N\ .$$

Hierin ist der erste Faktor die bedingte Wahrscheinlichkeit $W_N(p_K)$, daß die Zahlungsbereitschaft der Nachfrager nicht unter dem Kaufpreis p_K liegt. Wie in *Abb. 2* dargestellt, hat die Preisnachfragefunktion von 0 bis zum unteren Nachfragergrenzpreis p_{Nu} den Wert des Gesamtnachfragestroms Λ_N. Sie fällt ab p_{Nu} bis zum oberen Nachfragergrenzpreis p_{No} stetig auf den Wert 0. Der Verlauf ist abhängig vom Parameter n. Für $n = 0$ ist er linear, für $n > 0$ nach unten und für $-1 < n < 0$ nach oben durchgebogen.

Das Integral (13) ergibt mit einer Modellverhaltensfunktion (14) die ansteigende *Standard-Preisangebotsfunktion* mit dem Parameter $m > -1$: (19)

$$\Lambda_A(p_K) = \mathrm{WENN}(p_K<p_{Au};\ 0;\ \mathrm{WENN}(p_K>p_{Ao};\ 1;\ 1-((p_{Au}-p_K)/(p_{Ao}-p_{Au}))^{m+1}))\cdot\Lambda_A = W_A(p_K)\cdot\Lambda_A$$

Hierin ist der erste Faktor die bedingte Wahrscheinlichkeit $W_A(p_K)$, daß die Grenzpreise der Anbieter nicht über dem Kaufpreis p_K liegen. Wie *Abb. 4* zeigt, steigen die Angebotsfunktionen ab dem unteren Angebotsgrenzpreis p_{Au} vom Wert 0 bis zum oberen Angebotsgrenzpreis p_{Ao} auf den Gesamtangebotsstrom Λ_A stetig an. Der Anstieg ist abhängig vom Parameterwert für $m = 0$ linear, für $m > 0$ nach oben und für $-1 < m < 0$ nach unten durchgebogen.

Das Marktverhalten eines Stroms von Akteuren, der sich aus Gruppen mit unterschiedlichem Marktverhalten zusammensetzt, läßt sich durch eine Summe *partieller Nachfragerströme* Λ_{Ni} von Nachfragergruppen Ni bzw. *partieller Anbieterströme* Λ_{Aj} von Anbietergruppen Aj mit *konformen Marktverhalten* darstellen, für deren Verhalten unterschiedliche Modellfunktionen (13) angesetzt werden. Bei einem oder wenigen Akteuren sowie bei gleichem *Kollektivverhalten* der einzelnen Gruppen haben die Argumente $x = p$, m und q nur *diskrete Werte* x_i. Dann ist die Verhaltensdichte als Summe von Produkten $w_i\cdot\delta(x-x_i)$ der *Punktwahrscheinlichkeiten* w_i mit *Dirac-Funktionen* $\delta(x-x_i)$ darstellbar, deren Integral $\int dx\cdot f(x)\cdot\delta(x-x_i)$ für jede stetige Funktion $f(x_i)$ den Wert $f(x_i)$ hat [Dirac 1974, p. 58ff.]. Damit werden die Integrale zu Summen über die einzelnen Akteure bzw. Akteursgruppen mit gleichem Marktverhalten.

Eine Dirac-Funktion $\delta(x-x_i)$ resultiert aus der Standarddichtefunktion (14) mit $x_u = x_i$ im Grenzübergang $n \to \infty$ wie auch mit $x_o = x_i$ im Grenzübergang $n \to -1$. Mit diskreten Grenzpreisen p_{Ni} und p_{Aj} werden aus den betreffenden Integralen Summen über die einzelnen Preise. Dadurch wird die Nachfragefunktion zu einer *abfallenden Stufenfunktion*. Aus der Angebotsfunktion wird eine *ansteigende Stufenfunktion*. Auf diese Weise lassen sich die Marktergebnisse für *Monopole*, *Kartelle* und kleine Akteursanzahlen aus den diskreten Punktwahrscheinlichkeiten w_{Ni} und w_{Aj} berechnen, für die unterschiedliche *Häufigkeitsverteilungen* angesetzt werden können.

Statt der Standarddichtefunktion (15) sind auch andere stetige oder unstetige Dichtefunktionen verwendbar, mit denen sich das empirische Verhalten der Akteure darstellen läßt. Für die meisten bekannten Standardfunktionen sind die nachfolgenden Transfergleichungen des Marktes jedoch nicht explizit lösbar, sondern nur numerisch berechenbar. Noch schwieriger werden die Berechnungen für Verhaltensdichten, die sich nicht faktorisieren lassen.

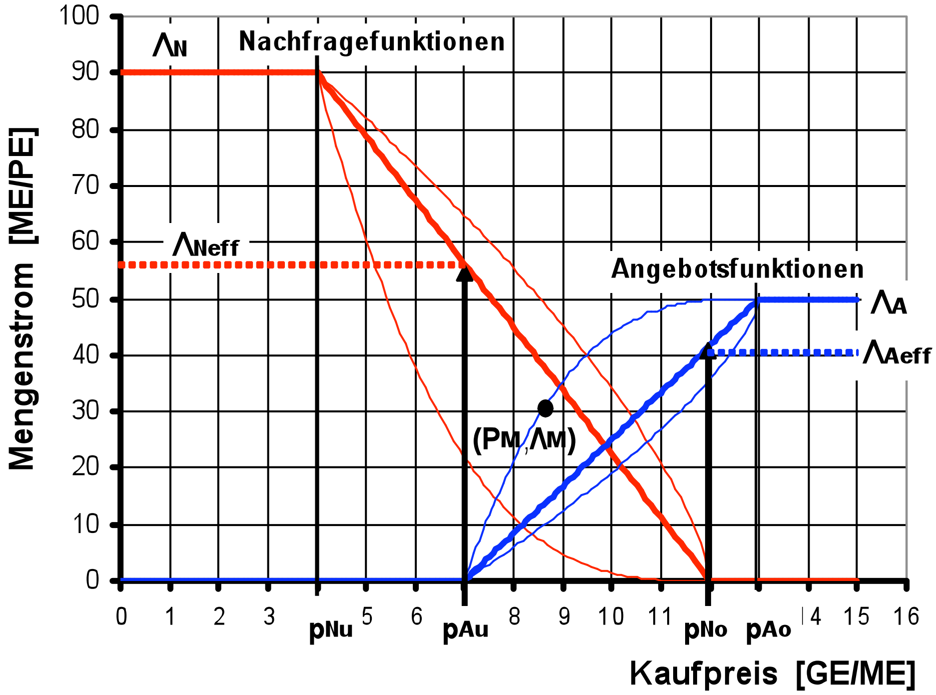

Abb. 5 Preismarktdiagramm für unterschiedliche Standardverteilungen der Grenzpreise von Nachfrage und Angebot

Parameter: Standardkonstellation *Tab. 1, Abb. 1* u. *2*, *Abb. 3* u. *4*
Punkt $(P_M;\Lambda_M) = (8{,}7;31)$: Marktergebnis für Anbieterfestpreise

Wenn auf einem Markt ein Nachfragerstrom mit der *Standard-Preisnachfragefunktion* (18) und ein Anbieterstrom mit der *Standard-Preisangebotsfunktion* (19) zusammentreffen, ergibt sich das *Preismarktdiagramm Abb. 5*. Ein entsprechendes *Qualitätsmarktdiagramm* gilt für das Zusammentreffen von Nachfragern mit einer *Qualitätsnachfragefunktion*, die mit zunehmender Qualität steigt, und Anbietern mit einer *Qualitätsangebotsfunktion*, die mit steigender Qualität fällt. Die Begegnung eines kaufbereiten Nachfragers mit einem verkaufsbereiten Anbieter führt zu einem Kaufabschluss K mit dem *Kaufpreis* p_K für die *Kaufmenge* m_K der *Kaufqualität* q_K, wenn die Einkaufs- und Verkaufsbedingungen der Akteure verträglich sind und die Preis- und Mengenbildung geregelt ist [Gudehus 2007].

Kaufbedingungen

Auf einem *freien Markt*, auf dem weder Nachfrager noch Anbieter gegen ihren Willen zu einem Kaufabschluss gezwungen sind, gelten die *allgemeinen Kaufbedingungen*:

- *Preisbedingung*: Der Kaufpreis p_K ist nicht kleiner als der Anbietergrenzpreis p_A und nicht höher als der Nachfragergrenzpreis p_N

$$p_A \le p_K \le p_N \quad . \tag{20}$$

- *Qualitätsbedingung*: Die Angebotsqualität q_N ist nicht geringer als die Nachfragerqualitätsanforderung q_N

$$q_A \geq q_N \quad . \qquad (21)$$

Wenn ein Wirtschaftsgut mehrere Qualitätsmerkmale hat, sind Qualitätserwartung $q_N = (q_{N1};q_{N1};\ldots q_{Nn})$ und Qualitätsangebot $q_A = (q_{A1};q_{A1};\ldots q_{An})$ Vektoren. Dann muss als Voraussetzung für einen Kauf die Qualitätsbedingung (21) für jedes Merkmal erfüllt sein. Für *homogene Wirtschaftsgüter* ist $q_A = q_N$. Damit entfällt die Qualitätsbedingung.

Wenn Nachfrager oder/und Anbieter keine *Mengenteilung* zulassen, sind zusätzlich zur Preis- und Qualitätsbedingung entsprechende *Mengenbedingungen* zu erfüllen: Bei *unzulässiger Angebotsmengenteilung* muss die Nachfragemenge mindestens so groß wie die Angebotsmenge, also $m_N \geq m_A$ sein, bei *unzulässiger Nachfragemengenteilung* muss die Anbotsmenge mindestens so groß wie die Nachfragemenge, also $m_A \geq m_N$ sein, und bei beidseitig unzulässiger Mengenteilung muss die Angebotsmenge gleich der Nachfragemenge, also $m_A = m_N$ sein.

Die Wahrscheinlichkeit, daß bei der Begegnung eines Nachfragers mit einem Anbieter Preisbedingung und Qualitätsbedingung erfüllt sind, ist die *Kaufverträglichkeitswahrscheinlichkeit*. Ohne Mengenbedingungen ist sie:

$$W_V(p_N;p_A;q_N;q_A) = \text{WENN}(p_A \leq p_N\ ;\ \text{WENN}(q_A \geq q_N\ ;\ 1\ ;\ 0\ ))\quad . \qquad (22)$$

Die *Kaufunverträglichkeitswahrscheinlichkeit* ist $1\text{-}W_V$. Wegen der Kaufunverträglichkeit ist der Anteil des Nachfragerstroms mit Grenzpreisen unter dem kleinsten Anbietergrenzpreis p_{Au} und mit Qualitätsanforderungen über dem höchsten Qualitätsangebot q_{Ao} kaufunwirksam. Die bezüglich der Angebotsgrenzpreise ab p_{Au} *effektive Nachfragemenge* Λ_{Neff} zeigt *Abb. 5.* Die Verträglichkeitswahrscheinlichkeit (22) bewirkt die *Wahrscheinlichkeit der effektiven Nachfrage*

$$W_N(p_{Au}) = \int dp_N \int dm_N \int dq_N\ w_N(p_N;m_N;q_N)\cdot W_V(p_N;p_A;q_N;q_A)\ . \qquad (23)$$

und eine Reduzierung des Nachfragerstroms λ_N auf den *effektiven Nachfragerstrom*

$$\lambda_{Neff}(p_{Au}) = W_N(p_{Au}) \cdot \lambda_N \quad . \qquad (24)$$

Für den effektiven Nachfragerstrom (24) gilt die auf 1 normierte *effektive Nachfragerverhaltensdichte*

$$w_{Neff}(p_N;m_N;q_N) = \text{WENN}(\ p_N<p_{Au};\ 0;\ w_N(p_N;m_N;q_N)/W_N(p_{Au})\ )\ . \qquad (25)$$

Wenn die Verteilung der Mengen unabhängig von der Verteilung der Preise ist, bleibt die Mengenverteilung von der Preisbedingung unberührt. Die Mengenintegrale (2) und (3) ergeben dann die gleiche mittlere Menge $m_{Nm\ eff} = m_{Nm}$ und die gleiche Mengenvarianz $s_{Nmeff}^2 = s_{Nm}^2$ wie ohne Preisbedingung. Daraus folgt der *effektive Nachfragemengenstrom*:

$$\Lambda_{Neff}(p_{Au}) = \lambda_{Neff} \cdot m_{Nm\ eff} = W_N(p_{Au})\cdot\Lambda_N \quad . \qquad (26)$$

Mit der Modellverhaltensfunktion (14) ergibt das Integral (23) für einen unteren Anbietergrenzpreis p_{Au} die *effektive Standardnachfragewahrscheinlichkeit*:

$$W_N(p_{Au}) = \text{WENN}(p_{Au}<p_{Nu};\ 1\ ;\ \text{WENN}(p_{Au}>p_{No};\ 0;\ ((p_{No}\text{-}p_{Au})/(p_{No}\text{-}p_{Nu}))^{n+1}))\ . \qquad (27)$$

Für die Marktkonstellation *Abb. 5* mit n = 0, also mit gleich verteilten Nachfragepreisen und linear fallender Nachfragefunktion, ist $W_N(p_{Au}=7) = 0{,}625$. Vom gesamten Nachfragerstrom $\lambda_N = 50$ N/PE mit dem Bedarf $\Lambda_N = 90 \pm 5$ ME/PE sind 62,5 % kaufwirksam, d.h. ein effektiver Nachfragerstrom $\lambda_{Neff} = 31$ N/PE mit dem effektiven Bedarf $\Lambda_{Neff} = 56 \pm 5$ ME/PE, während 37,5 %, also 19 N/PE mit dem Bedarf 34 ± 4 ME/PE keine Kaufchance haben.

Für den effektiven Nachfragerstrom ergeben die Integrale (3) und (4) mit der effektiven Verhaltensdichte (25) und der Modellverhaltensfunktion den *effektiven mittleren Nachfragepreis* und dessen *Einzelvarianz*:

$$p_{Nm\,eff} = \text{WENN}(p_{Nu}>p_{Au};\ ((n+1)\cdot p_{Nu}+p_{No})/(n+2);\ ((n+1)\cdot p_{Au}+p_{No})/(n+2)) \qquad (28)$$

$$s_{Npeff}^2 = \text{WENN}(p_{Nu}>p_{Au};\ (p_{No}-p_{Nu})^2;\ (p_{No}-p_{Au})^2)\cdot(n+1)/((n+2)(n+3) \quad . \qquad (29)$$

Für die Markkonstellation *Abb. 5* ist $p_{Nu}<p_{Au}$ und der mittlere Nachfragerpreis des effektiven Nachfragestroms $p_{Neff} = 9{,}5 \pm 0{,}5$ GE/ME im Vergleich zum mittleren Nachfragerpreis $p_{Nm} = 8{,}0 \pm 0{,}4$ GE/ME des Gesamtnachfragestroms.

Entsprechend wird durch die Preisbedingung (20) der Anbieterstromanteil mit Grenzpreisen über dem höchsten Nachfragergrenzpreis p_{No} und durch die Qualitätsbedingung (21) der Stromanteil mit Qualitätsangeboten unterhalb der geringsten Qualitätsanforderung q_{Nu} unwirksam. Die Preisbedingung (20) bewirkt die *Wahrscheinlichkeit des effektiven Angebots*:

$$W_A(p_{No}) = \int dp_A \int dm_A \int dq_A \cdot w_A(p_A;m_A;q_A)\cdot W_V(p_N;p_A;q_N;q_A) \qquad (30)$$

und eine Reduzierung des Anbieterstroms λ_A auf den *effektiven Anbieterstrom*:

$$\lambda_{Aeff}(p_{No}) = W_A(p_{No}) \cdot \lambda_A \quad . \qquad (31)$$

Für den effektiven Anbieterstrom gilt die auf 1 normierte *effektive Anbieterverhaltensdichte*

$$w_{Aeff}(p_A;m_A;q_A) = \text{WENN}(\ p_A>p_{No};\ 0;\ w_A(p_A;m_A;q_A)/W_A(p_{No})\ ) \quad . \qquad (32)$$

Wenn die Mengenverteilung unabhängig von der Preisverteilung ist, ergeben die Mengenintegrale (2) und (3) mit der effektiven Wahrscheinlichkeitsdichte (32) den gleichen Mittelwert $m_{Am\,eff} = m_{Am}$ und die gleiche Varianz $s_{Ameff}^2 = s_{Am}^2$ der Angebotsmenge wie ohne Preisbedingung. Dann ist der *effektive Angebotsmengenstrom*:

$$\Lambda_{Aeff}(p_{No}) = \lambda_{Aeff} \cdot m_{Am\,eff} = W_A(p_{No}) \cdot \Lambda_A \quad . \qquad (33)$$

Mit der Modellverhaltensfunktion (14) ergibt das Integral (30) für einen oberen Nachfragergrenzpreis p_{No} die *effektive Standardangebotswahrscheinlichkeit*:

$$W_A(p_{No}) = \text{WENN}(p_{No}<p_{Au};\ 0;\ \text{WENN}(p_{No}>p_{Ao};\ 1;\ 1-((p_{Au}-p_{No})/(p_{Ao}-p_{Au}))^{m+1}). \qquad (34)$$

Für die Marktkonstellation der *Abb. 5* mit m = 0, also mit gleichverteilten Angebotspreisen und linear steigender Angebotsfunktion, ist $W_N(p_{No}=7) = 0{,}833$. Von dem Anbieterstrom $\lambda_A = 10$ A/PE mit einem Gesamtangebot $\Lambda_A = 50$ ME/PE haben 83,3 %, d.h. im Mittel effektiv $\lambda_{Aeff} = 8{,}3$ A/PE mit dem effektiven Angebot $\Lambda_{Aeff} = 41{,}5$ ME/PE Verkaufschancen und 16,7 %, also im Mittel 1,7 A/PE mit dem Angebot 8,5 ME/PE keine Verkaufschance.

Die Integrale (3) und (4) ergeben mit der effektiven Verhaltensdichte (32) und der Modellverhaltensfunktion den *effektiven mittleren Angebotspreis* und dessen Einzelvarianz

$$p_{Am\,eff} = \text{WENN}(p_{Ao}<p_{No};\ ((n+1)\cdot p_{Au}+p_{Ao})(n+2);\ ((n+1)\cdot p_{Au}+p_{No})(n+2)) \quad . \qquad (35)$$

$$s_{Ap\,eff}^2 = \text{WENN}(p_{Ao}<p_{No};\ (p_{Ao}-p_{Au})^2;\ (p_{No}-p_{Au})^2)\cdot(n+1)/((n+2)(n+3) \quad . \qquad (36)$$

Für die Markkonstellation *Abb. 5* ist $p_{No} > p_{Au}$ und der mittlere Angebotspreis des effektiven Angebots $p_{Am\,eff} = 9{,}5 \pm 0{,}5$ GE/ME, während der mittlere Grenzpreis des Gesamtangebots $p_{Am} = 10{,}0 + 0{,}6$ GE/ME ist.

Preisbildung und Mengenbildung

Die *Preisbildung* ist entweder von der *Marktordnung* vorgeben oder das Ergebnis einer Preisverhandlung [Gudehus 2007, S. 143ff]. Bei *freier Preisbildung* durch die Akteure oder deren Beauftragte resultiert der Kaufpreis p_K aus der *allgemeinen Kaufpreisfunktion*:

$$p_K = \beta \cdot p_N + (1-\beta) \cdot p_A \quad . \tag{37}$$

Der Preisbildungsparameter ist für *Anbieterfestpreise* $\beta_A = 0$, für *Nachfragerfestpreise* $\beta_N = 1$ und für *faire Vermittlungspreise* $\beta_F = ½$ (vgl. [Peters 2002, S. 114]. Bei *Verhandlungspreisen* liegt der Preisbildungsparameter β_V im Intervall $0 \leq \beta_V \leq 1$. Er hängt vom Verhandlungsgeschick und der Marktmacht der Akteure ab. Bei größerer Nachfragermacht liegt er näher bei 0, bei größerer Nachfragermacht näher bei 1. Aus einer großen Anzahl von Preisverhandlungen ergibt sich eine *Verteilungsdichte der Preisbildungsparameter* $w(\beta_V)$ mit einem *mittleren Preisbildungsparameter* β_{Vm}, der die Machtverhältnisse auf dem Markt kennzeichnet.

Bei extern *eingeschränkter Preisbildung* sind die Kaufpreise nach unten durch einen *Mindestkaufpreis* p_{Kmin} und/oder nach oben durch einen *Maximalkaufpreis* p_{Kmax} begrenzt:

$$p_{Kmin} \leq p_K \leq p_{Kmax} \tag{38}$$

Eine externe Begrenzung der Kaufpreise reduziert die Wahrscheinlichkeit eines Kaufabschlusses um die *Preiszulässigkeitswahrscheinlichkeit*:

$$W_P(p_K) = \text{WENN}(p_K \geq p_{Kmin} ; \text{WENN}(p_K \leq p_{Kmax} ; 1 ; 0)) \tag{39}$$

Wenn $p_{Kmin} = p_{Kmax} = p_{Kfix}$ ist, bewirkt die Preisbegrenzung (38) einen für alle Akteure verbindlichen *Festkaufpreis* p_{Kfix}. Dann gilt statt der allgemeinen Kaufpreisfunktion (37) die externe *Festkaufpreisregelung*:

$$p_K = p_{Kfix} \quad . \tag{40}$$

Bei großen Kaufmengen kann der Kaufpreis mit der Kaufmenge sinken, weil der Verkäufer seine Angebotsmenge bei Verkauf größerer Mengen schneller absetzt. Dadurch werden Kosten gespart, rasch eine hohe Auslastung erreicht und das Verkaufsrisiko gesenkt. Im Wissen darum haben die Nachfrager großer Mengen bei ausreichendem Gesamtangebot eine größere Marktmacht. Die in der Praxis üblichen *Mengenstaffelpreise* und *Mengenrabatte* lassen sich durch einen *kaufmengenabhängigen Preisbildungsfaktor* $\beta(m_K) = \beta_o/(1+m_K)$ berücksichtigen, der für geringe Kaufmengen β_o ist und mit zunehmender Kaufmenge gegen 0 geht.

Wenn die Akteure frei über die Kaufmengen entscheiden können und Mengenteilung zulassen, resultiert die Kaufmenge aus der *allgemeinen Kaufmengenfunktion*:

$$m_K = \text{MIN}(m_N ; m_A) \quad . \tag{41}$$

Bei extern *eingeschränkter Mengenbildung* sind die Kaufmengen nach unten durch eine *Mindestkaufmenge* m_{Kmin} und/oder nach oben durch eine *Maximalkaufmenge* m_{Kmax} begrenzt:

$$m_{Kmin} \leq m_K \leq m_{Kmax} \tag{42}$$

Eine externe Mengenbegrenzung vermindert die Wahrscheinlichkeit eines Kaufabschlusses um die *Mengenzulässigkeitswahrscheinlichkeit*:

$$W_M(m_K) = \text{WENN}(m_K \geq m_{Kmin} ; \text{WENN}(m_K \leq m_{Kmax} ; 1 ; 0)) \quad . \tag{43}$$

Für den Fall, daß $m_{Kmin} = m_{Kmax} = m_{Kfix}$ gefordert wird, bewirkt die Mengenbedingung (42) die gleiche Festkaufmenge m_{Kfix} für alle Akteure. Damit gilt statt der allgemeinen Kaufmengenfunktion (41) eine externe *Festkaufmengenregelung*:

$$m_K = m_{Kfix} \quad . \qquad (44)$$

Weitere Zusatzbedingungen können *kaufpreisabhängige Verkaufsmengen* $m_K = m_K(p_K)$ sein. Die Umkehrfunktion dieser Abhängigkeit ist ein mengenabhängiger Kaufpreis, der wie oben dargestellt durch einen mengenabhängigen Preisbildungsfaktor berücksichtigt werden kann.

Wenn die Qualitätsbedingung (21) erfüllt ist und es zum Kauf kommt, erhält ein Käufer mit der Qualitätserwartung $q_N \geq q_A$ die Angebotsqualität q_A. Die Kaufqualität ist also gegeben durch die *allgemeine Kaufqualitätsfunktion*:

$$q_K = q_A \quad . \qquad (45)$$

Eine *Qualitätsabhängigkeit der Kaufpreise* ergibt sich selbstregelnd durch die Preisbildungsfunktion (37), wenn die Grenzpreise der Akteure von der Qualität abhängen.

Die Kaufpreisfunktion (37) und die Kaufmengenfunktion (41) in Verbindung mit der Kaufverträglichkeitswahrscheinlichkeit (22) und den Zulässigkeitswahrscheinlichkeiten (39) und (43) sind die *Transfergleichungen des Marktes*. Mit den Transfergleichungen lassen sich im Prinzip alle Marktergebnisse aus den Einlaufströmen und Verhaltensdichten von Nachfrage und Angebot berechnen.

Begegnungsreichweiten und Begegnungsfolgen

Die einzelnen Akteure können nach der ersten Begegnung den Markt mit oder ohne Kauferfolg sofort wieder verlassen oder sich danach mit weiteren Akteuren treffen. Auf *Märkten mit einmaliger Begegnung* treffen zufällig ankommende Nachfrager einmal mit zufällig ankommenden Anbietern ohne Auswahlkriterien zusammen. Auf *Märkten mit mehrfacher Begegnung* suchen Akteure, die bei der ersten Begegnung ihren Bedarf nicht gedeckt oder ihre Angebotsmenge nicht vollständig verkauft haben, in der gleichen Periode weitere Akteure auf. Die *Begegnungsreichweiten* der Nachfrager und der Anbieter sind weitere *Verhaltensparameter eines Marktes*:

- Die *Nachfragerreichweite* r_N ist die Anzahl Anbieter, mit denen ein *Nachfrager* in einer Marktperiode zusammentrifft bis er den Markt verlässt. Sie ist minimal 1 und maximal gleich der Zahl der Anbieter, die in einer Periode auf dem Markt kommen

$$1 \leq r_N \leq \lambda_A \quad . \qquad (46)$$

- Die *Anbieterreichweite* r_A ist die Anzahl Nachfrager, mit denen ein *Anbieter* in einer Marktperiode zusammentrifft bis er den Markt verlässt. Sie ist minimal 1 und maximal gleich der Zahl der Nachfrager, die in einer Periode auf dem Markt kommen

$$1 \leq r_A \leq \lambda_N \quad . \qquad (47)$$

Ein Nachfrager kann mehrere Anbieter rein zufällig aufsuchen oder nach einer gezielten *Begegnungsstrategie*, z.B. nach ansteigenden Angebotspreisen oder nach fallender Angebotsqualität Das gleiche gilt für Anbieter, die mehr als einen Nachfrager aufsuchen, z.B. nach fallender Zahlungsbereitschaft oder steigendem Qualitätsanspruch.

Das Zusammentreffen der Nachfrager mit mehreren Anbietern und der Anbieter mit mehreren Nachfragern erhöht die Anzahl der Begegnungen sowie bei gezielten Begegnungsstrategien auch die Verhaltensdichten. Das erschwert die Berechnung der Marktergebnisse erheblich. Wegen der vielen Marktkonstellationen und Begegnungsmöglichkeiten steigen Anzahl und Komplexität der Lösungen mit der Anzahl der Akteure rasch an. Außerdem sind bei den Berechnungen mit den Standarddichtefunktionen (15) für Preise, Mengen und Qualität alle

Kombinationen der 6 möglichen Relationen der unteren und oberen Grenzen $x_{Nu} \leq x_{No}$ und $x_{Au} \leq x_{Ao}$ mit x = p, m und q zu betrachten. Im einfachen Fall eines Marktes mit zwei Nachfragern und zwei Anbietern gibt es bei Begegnungsreichweite $r_N = r_A = 1$ nur eine Konstellation, während es mit den Begegnungsreichweiten $r_N = r_A = 2$ bereits drei verschiedene Konstellationen mit unterschiedlichen Marktergebnissen gibt [s. *Kap. 2*, Gudehus 2007].

	Markt-parameter	Standard-konstellation	Modell-variationen
Nachfrager			
Zustrom und Anzahl	$\lambda_N = N_N$	50 $\pm$ 7	1, 2, 100
Grenzpreise	p_{Nu} / p_{No} / p_{Nm}	4 / 12 / 8,0	Variation p_{Nm}
Bedarfsmengen	m_{Nu} / m_{No} / m_{Nm}	1,0 / 2,6 / 1,8	Variation m_{Nm}
Qualitätserwartung	q_{Nu} / q_{No} / q_{Nm}	1 / 1 / 1	erfüllt
Nachfragemengenstrom	$\Lambda_N = \lambda_N \cdot m_{No}$	90 $\pm$ 5	berechnet
Begegnungsreichweite	$r_N = N_N!$	1	bis λ_N
Ankunftsfolge	zufällig/geordnet	zufällig	preisansteigend
Anbieter			
Zustrom und Anzahl	$\lambda_A = N_A$	10 $\pm$ 0	1, 2, 10
Grenzpreise	p_{Au} / p_{Ao} / p_{Am}	7 / 13 / 10,0	Variation p_{Am}
Angebotsmengen	m_{Au} / m_{Ao} / m_{Am}	5 / 5 / 5	Variation m_{Am}
Qualitätsangebot	q_{Au} / q_{Ao} / q_{Am}	1 / 1 / 1	erfüllt
Angebotsmengenstrom	$\Lambda_A = \lambda_A \cdot m_{Ao}$	50 $\pm$ 0	berechnet
Begegnungsreichweite	$r_A = N_A!$	1	bis λ_A
Ankunftsfolge	zufällig/geordnet	preisansteigend	zufällig
Marktordnung			
Preisbildung	$p_K = \beta \cdot p_N + (1-\beta) \cdot p_A$	$\beta = 0 / 1 / ½$	variables β
Preisbedingungen	p_{Kmin} / p_{Kmax} / p_{Kfix}	ohne	Festkaufpreise
Mengenbildung	$m_K = MIN(m_N;m_A)$	$m_K = MIN(m_N;m_A)$	keine
Mengenbedingungen	m_{Kmin} / m_{Kmax} / m_{Kfix}	ohne	keine
Qualitätsbildung	$q_K = MAX(q_N;q_A)$	$q_K = q_N = q_A$	erfüllt
Qualitätsbedingungen	q_{Kmin} / q_{Kfix}	q_{Kfix}	keine

Tabelle 1: Marktparameter und Modellkonstellationen
Normalpreisrelation: $p_{Nu} \leq p_{Au} \leq p_{No} \leq p_{Ao}$

Weitere Schwierigkeiten ergeben sich bei der Lösung der Integrale, wenn das Preis-, Mengen- und Qualitätsverhalten der einzelnen Akteure voneinander abhängig und die Verhaltensdichten nicht faktorisierbar sind. Explizit lösbar sind die Integrale, wenn für die Ströme und Verhaltensdichten geeignete *Modellfunktionen* angenommen werden, welche die realen Marktkonstellationen möglichst zutreffend darstellen. Außerdem ist zu berücksichtigen, daß unterschiedliche Besuchsfrequenzen λ und Einzelmengen m zum gleichen Einlaufmengenstrom $\Lambda = \lambda \cdot m$ führen, wenn $m(\lambda) = \Lambda/\lambda$ ist, denn bei gleichem Gesamtmengenstrom können sich infolge veränderter Disposition die Nachfrage- oder Angebotsmengen ändern.

Die vorangehenden Definitionen, Transfergleichungen und Berechnungsformeln sind das grundlegende *Instrumentarium der dynamischen Markttheorie*. Ihre Anwendung zur Berechnung der Marktergebnisse für unterschiedliche Marktkonstellationen ist eine schwierige, aber lohnende Aufgabe für die *mathematischen Wirtschaftsforschung*. Ein Test der theoretischen Marktergebnisse ist durch *Simulationsrechnungen* möglich. Durch realitätsnahe Marktsimulationen lassen sich auch für komplexe Konstellationen und verkoppelte Märkte, für die keine theoretischen Lösungen vorliegen, Absatz- und Beschaffungsstrategien entwickeln und die Auswirkungen von Verhaltensänderungen der Akteure testen [Gudehus 2007].

Die weiteren Ausführungen beschränken sich auf ausgewählte Marktkonstellationen von praktischer Bedeutung, für die bereits Simulationsergebnisse vorliegen [Gudehus 2007]. Die Parameter der betrachteten Marktkonstellationen sind in *Tabelle 1* zusammengestellt. Für diese Konstellationen werden mit den *Modellverhaltensfunktionen* (14) und für die *Normalpreisrelation* $p_{Nu} \leq p_{Au} \leq p_{No} \leq p_{Ao}$ der *Abb. 5* Formeln zur Berechnung von Marktergebnissen hergeleitet und Modellrechungen durchgeführt.

Zur weiteren Vereinfachung werden die Qualitätsbedingungen als erfüllt vorausgesetzt. Alle Integrale über die Qualität ergeben dann 1 und können weggelassen werden. Die Kaufverträglichkeitswahrscheinlichkeit vereinfacht sich zu $W_V(p_A;p_N) = \text{WENN}(p_A<p_N; 1; 0)$. Außerdem sollen keine Preis- oder Mengenbegrenzungen gelten. Dann sind die Zulässigkeitswahrscheinlichkeiten $W_P(p_K) = 1$ und $W_M(m_K) = 1$.

Märkte mit einmaliger Begegnung

Auf einem Markt mit einmaliger Begegnung verlässt jeder Akteur nach der ersten Begegnung mit oder ohne Kauferfolg den Markt. Der Markt bleibt stationär, solange die erfolglosen Akteure nicht zurückkehren. Kommen sie in den nächsten Perioden in größerer Zahl wieder, können sich Zustrom und Verhaltensdichten ändern und dadurch ein *dynamischer Markt* entstehen. Für hinreichend kurze Betrachtungsperioden sind die Nachfrager- und Anbieterströme so sporadisch, daß pro Periode maximal eine Begegnung stattfindet.

Die *Kaufwahrscheinlichkeitsdichte*, daß es bei einmaligem Zusammentreffen eines kaufbereiten Nachfragers mit einem verkaufsbereiten Anbieter zu einem *Kaufereignis* K kommt, ist das Produkt der Verhaltensdichten der Nachfrager und Anbieter mit der Kaufverträglichkeitswahrscheinlichkeit (22) und den Zulässigkeitswahrscheinlichkeiten (39) und (43). (48)

$$w_K(p_N;m_N;q_N;p_A;m_A;q_A) = w_N(p_N;m_N;q_N) \cdot w_A(p_A;m_A;q_A) \cdot W_V(p_N;p_A;q_N;q_A) \cdot W_P(p_K) \cdot W_M(m_K) \; .$$

Die Kaufwahrscheinlichkeitsdichte (48) ist im *p_N-m_N-q_N-p_A-m_A-q_A-Zustandsraum des Marktes* definiert. Die Integration über alle Preise, Mengen und Qualitäten von Nachfrage und Angebot ergibt die *Kaufwahrscheinlichkeit bei einmaliger Begegnung*:

$$W_K = \int dp_N \int dm_N \int dq_N \int dp_A \int dm_A \int dq_A \; w_K(p_N;m_N;q_N;p_A;m_A;q_A) \; . \qquad (49)$$

Da infolge der Kaufbedingungen und Begrenzungen nicht jede Begegnung zum Kauf führt, ist die Kaufwahrscheinlichkeit (47) in der Regel kleiner als 1 und die Kaufwahrscheinlichkeitsdichte (49) nicht normiert. Zur Berechnung der Marktergebnisse muss daher die Kaufwahrscheinlichkeitsdichte durch die Kaufwahrscheinlichkeit W_K geteilt werden, um sie auf 1 zu normieren.

Mit der normierten Kaufwahrscheinlichkeitsdichte lassen sich die aktuellen Marktergebnisse bei einmaliger Begegnung berechnen. So sind mit der Kaufmengenfunktion $m_K = \mathrm{MIN}(m_N;m_A)$ der *Mittelwert* und die *Einzelvarianz* der *Kaufmengen bei einmaliger Begegnung* der Akteure gegeben durch:

$$m_{Km} = \int dp_N \int dm_N \int dq_N \int dp_A \int dm_A \int dq_A \; w_K/W_K \cdot m_K \qquad (50)$$

$$s_{mK}^2 = \int dp_N \int dm_N \int dq_N \int dp_A \int dm_A \int dq_A \; w_K/W_K \cdot (m_K - m_{Km})^2 \qquad (51)$$

Mit der Kaufpreisfunktion $p_K = p_K(p_N;p_A)$, die für freie Preisbildung durch Beziehung (37) und für externe Festkaufpreise durch Beziehung (40) gegeben ist, sind der *Mittelwert* und die *Einzelvarianz* des mengengewichteten *Kaufpreises bei einmaliger Begegnung*:

$$p_{Km} = \int dp_N \int dm_N \int dq_N \int dp_A \int dm_A \int dq_A \; w_K/W_K \cdot p_K \cdot m_K/m_{Km} \qquad (52)$$

$$s_{pK}^2 = \int dp_N \int dm_N \int dq_N \int dp_A \int dm_A \int dq_A \; w_K/W_K \cdot (p_K - p_{Km})^2 \cdot m_K/m_{Km} \qquad (53)$$

Der mittlere Kaufpreis (52) ist der *Marktpreis* P_M für eine aktuelle Periode, d.h. $P_M = p_{Km}$. Dessen Periodenvarianz läßt sich bei bekannter *Kauffrequenz* λ_K [K/PE] mit Beziehung (10) aus der Einzelvarianz der Kaufpreise (53) berechnen.

Mittelwert und Einzelvarianz der *Kaufqualität* ergeben sich aus analogen Beziehungen mit der *Qualitätsfunktion* $q_K = q_A$, die in (52) und (53) die Kaufpreisfunktion für p_K ersetzt.

Wenn der einlaufende Nachfragerstrom λ_N [N/PE] größer ist als der Anbieterstrom $\lambda_A(t)$ [A/PE] ist, also für $\lambda_N > \lambda_A$, und alle Anbieter nach einmaligem Zusammentreffen den Markt verlassen, kommt es pro Periode zu λ_A Begegnungen, die mit der Wahrscheinlichkeit (49) zu einem Kaufereignis K führen. Das bewirkt eine Kauffrequenz $\lambda_K = W_K \cdot \lambda_A$ und einen Kaufmengenstrom $\Lambda_K = \lambda_K \cdot m_{Km} = W_K \cdot \lambda_A \cdot m_{Km}$ mit der mittleren Kaufmenge (50). Wenn der Anbieterstrom größer ist als der Nachfragerstrom, also für $\lambda_A > \lambda_N$, kommt es pro Periode zu λ_N Begegnungen, $W_K \cdot \lambda_N$ Kaufabschlüssen und dem Kaufmengenstrom $\Lambda_K = W_K \cdot \lambda_N \cdot m_{Km}$. Die *Kauffrequenz bei einmaliger Begegnung* der Akteure ist also

$$\lambda_K = W_K \cdot \mathrm{MIN}(\lambda_N; \lambda_A) \qquad [K/PE] \; . \qquad (54)$$

Der auslaufende *Kaufmengenstrom* ist damit

$$\Lambda_K = W_K \cdot \mathrm{MIN}(\lambda_N; \lambda_A) \cdot m_{Km} \qquad [ME/PE]. \qquad (55)$$

Die *Periodenvarianz des Kaufmengenstroms* ist für statistisch ausreichende Kauffrequenzen berechenbar aus der *Varianz* $s_{\lambda K}$ des kleineren Einlaufstroms $\mathrm{MIN}(\lambda_N;\lambda_A)$ und der *Kaufmengenvarianz* (51) mit der zu (11) analogen Beziehung:

$$s_{\Lambda K}^2 = m_{Km}^2 \cdot s_{\lambda K}^2 + \lambda_K \cdot s_{mK}^2 \; . \qquad (56)$$

Mit den Modellverhaltensfunktionen (14) für Nachfrage und Angebot sind die Integrale (49) bis (53) im Prinzip explizit lösbar. Für Parameter der Dichtefunktionen n, m ≠ 0 sind die Formeln allerdings sehr kompliziert. Für die in *Abb. 5* dargestellte *Normalpreisrelation* $p_{Nu} \leq p_{Au} \leq p_{No} \leq p_{Ao}$ und Standarddichten mit n = m = 0, d.h. mit linearer Nachfrage- und Angebotsfunktion, ergibt die Integration (49) die Kaufwahrscheinlichkeit der effektiven Nachfrager und Anbieter bei einmaliger Begegnung

$$W_K = (p_{No}-p_{Au})^2/(2(p_{No}-p_{Nu})(p_{Ao}-p_{Au})) \quad . \tag{57}$$

Mit den Preisparametern der Standardkonstellation *Abb. 5* errechnet sich hiermit die Kaufwahrscheinlichkeit 0,2604. D.h., in diesem Fall kommen nur 26 % der Nachfrager und der Anbieter zum Kauf. Damit ergibt sich der Marktabsatz Λ_M = 13 ME/PE. Wenn $p_{Nu} = p_{Au}$ und $p_{No} = p_{Ao}$ ist, haben zwar alle Nachfrager und alle Anbieter eine Kaufchance, die Kaufwahrscheinlichkeit ist jedoch nur 0,5 und der Marktabsatz 25 ME/PE. In diesem Fall kommen 50 % der Akteure zum Zuge, während 50 % ohne Kauf ausscheiden, da sie zufällig auf einen Akteur mit unverträglichem Grenzpreis getroffen sind und danach den Markt verlassen

Aus dem Integral (52) folgt für die Standardkonstellation der *Abb. 5* die Marktpreisformel:

$$P_M = \beta \cdot P_N + (1-\beta) \cdot P_A \tag{58}$$

mit dem Marktpreis bei reinen Anbieterfestpreisen

$$P_A = (p_{No} + 2 \cdot p_{Au})/3 \tag{59}$$

und dem Marktpreis bei reinen Nachfragerfestpreisen

$$P_N = (2 \cdot p_{No} + p_{Au})/3 \quad . \tag{60}$$

Mit den Preisparametern der Standardkonstellation *Abb. 5* ergibt sich für den Marktpreis bei Anbieterfestpreisen P_A = 8,67 GE/ME und bei Nachfragerfestpreisen P_N = 10,33 GE/ME.

Die für Märkte mit einmaliger Begegnung wahrscheinlichkeitstheoretisch berechneten Marktpreise und Absatzwerte stimmen mit den entsprechenden Simulationsergebnissen im Rahmen der statistischen Genauigkeit überein. Sie weichen jedoch, wie aus *Abb. 5* ersichtlich ist, erheblich vom Schnittpunkt der Nachfragekurve mit der Angebotskurve ab, der beim *Kreuzungsabsatz* 24 ME/PE und dem *Kreuzungspreis* 9,8 ME/GE liegt.

Angebotsmonopol

Ein Markt, auf dem ein Strom anonymer Nachfrager mit einem *Monopolanbieter* zusammentrifft, läßt sich nachfragerseitig durch einen stochastischen Nachfragerstrom λ_N [N/PE] mit einer stetigen Nachfragerverhaltensdichte $w_N(p_N;m_N)$ darstellen und anbieterseitig durch einen Anbieterstrom λ_A = 1 [A/PE] mit einer diskreten Anbieterverhaltensdichte, die das Produkt zweier Dirac-Funktionen $\delta(p_A-p_{Am}) \cdot \delta(m_A-m_{Am})$ ist. Die entsprechende Marktkonstellation zeigt *Abb. 6*. Sie wird für die Dauer einer Periode als konstant angenommen, kann sich aber von Periode zu Periode ändern.

In einer Marktperiode kommt also ein einziger Anbieter, der auch ein *Anbieterkartell* sein kann, mit dem *Monopolangebotsgrenzpreis* p_{Am} und der *Monopolangebotsmenge* m_{Am} auf den Markt. Er trifft dort solange mit Nachfragern zusammen, bis die gesamte Angebotsmenge verkauft ist, er den Markt vorzeitig verlässt oder die Marktperiode endet. Während die Nachfrager nach einer Begegnung den Markt mit oder ohne Kauferfolg verlassen müssen, da sie keine anderen Kaufmöglichkeiten haben, kann der Monopolanbieter bis zu $n_A = \lambda_N$ Begegnungen mit den λ_N Nachfragern abwarten, die in der gleichen Periode eintreffen.

Die erfolglosen Nachfrager können jedoch in den nächsten Perioden mit erhöhter Zahlungsbereitschaft zurückkehren, um mit verbesserter Aussicht zum Kauferfolg zu kommen. Dadurch verändert sich die Nachfragerverhaltensfunktion und es entsteht ein dynamischer Markt.

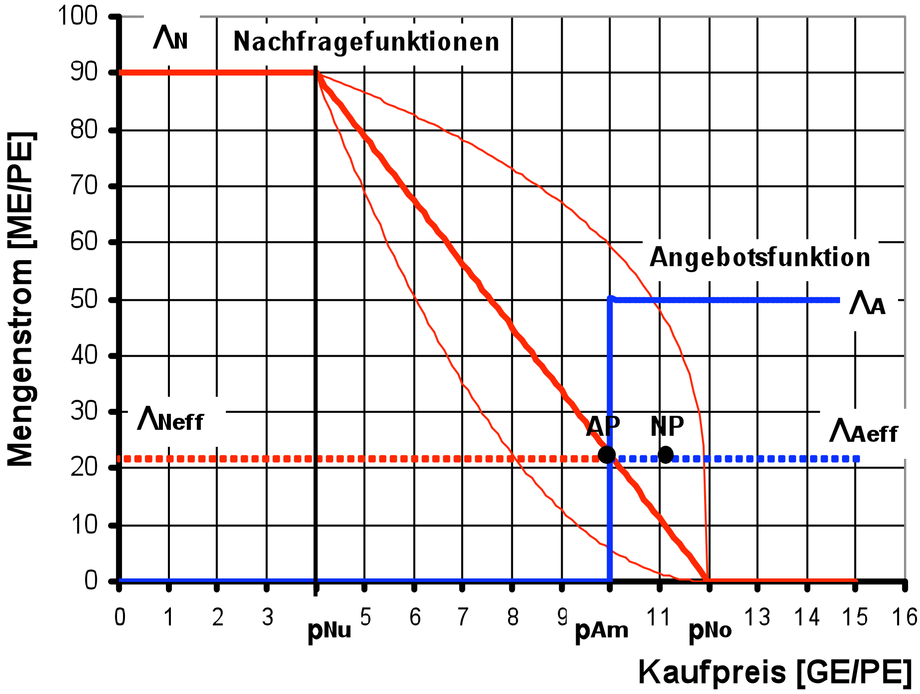

Abb. 6 Preismarktdiagramm für Monopolanbieter oder Angebotskartell

Nachfrageparameter: λ_N = 50 N/PE mit (p_{Nu}, p_{No},n) und (m_{Nu}, m_{No},n=0)

Angebotsparameter: λ_A = 1 A/PE mit $p_{Am} > p_{Nu}$ und $m_{Am} > m_{No}$

Ohne Qualitätsdifferenzierung, also mit $W_V(p_A;p_N)$ = WENN(p_A<p_N; 1; 0), und ohne Preis- und Mengenbegrenzung, d.h. mit $W_P(p_K) = 1$ und $W_M(m_K) = 1$, ist für den Angebotsmonopolmarkt die Kaufwahrscheinlichkeitsdichte bei einmaliger Begegnung:

$$w_K \;=\; w_N(p_N;m_N;q_N)\cdot\delta(p_A\text{-}p_{Am})\cdot\delta(m_A\text{-}m_{Am})\cdot\text{WENN}(p_A<p_N;\,1;\,0)\;. \qquad (61)$$

Nach Einsetzen in die Beziehungen (50) bis (53) lassen sich die Mengen- und Qualitätsintegrale ausführen. Damit resultiert die vom Monopolangebotspreis p_{Am} abhängige *Kaufwahrscheinlichkeit bei einmaliger Begegnung*:

$$W_K(p_{Am}) \;=\; \int_{p_{Am}}^{\infty} dp_N \int_0^{\infty} dm_N\, w_N(p_N;m_N;t) = \; W_N(p_{Am}) \qquad . \qquad (62)$$

Die Kaufwahrscheinlichkeit der einzelnen Nachfrager bei einem Monopolanbieter ist also gleich der *effektiven Nachfragewahrscheinlichkeit* (23) beim Monopolangebotspreis. Wenn die Verhaltensdichte $w_N(p_N;m_N) = w_S(p_N)\cdot w_S(m_N)$ ein Produkt von Preisverteilung und Mengenverteilung mit Standarddichte (15) ist, resultiert aus (62) die Kaufwahrscheinlichkeit:

$$W_K(p_{Am}) \;=\; \text{WENN}(p_{Am}<p_{Nu};\,1\,;\,\text{WENN}(p_{Am}>p_{No};\,0;\,((p_{No}\text{-}p_{Am})/(p_{No}\text{-}p_{Nu}))^{n+1}))\;. \qquad (63)$$

Die mittlere Kaufmenge der einzelnen Begegnung ergibt sich aus Beziehung (50) mit der durch $W_K(p_{Am})$ normierten Kaufwahrscheinlichkeitsdichte (61) und der Mengenbildungsfunktion $m_K = \text{MIN}(m_N;m_{Am})$ nach Ausführung aller Angebots- und Qualitätsintegrale:

$$m_{Km}(p_{Am}) = \int_{p_{Am}}^{\infty} dp_N \int_0^{\infty} dm_N\, \text{MIN}(m_N;m_{Am})\cdot w_N(p_N;m_N)/W_K(p_{Am}) \qquad (63)$$

Wenn die Angebotsmenge m_{Am} des Monopolisten kleiner ist als die einzelnen Nachfragemengen, wenn also $m_{Am} < m_N$ ist, ergibt die Mengenbildung $MIN(m_N;m_{Am}) = m_{Am}$. Dann ist das Integral (63) gleich m_{Am} und die Kaufmenge gleich der Angebotsmenge. In diesem Fall verkauft der Monopolanbieter bei einer Begegnung mit der Wahrscheinlichkeit W_K die Angebotsmenge m_{Am}, also im Mittel über viele Perioden die Menge $W_K \cdot m_{Am}$. Bei einer zweiten Begegnung, die mit der Wahrscheinlichkeit $(1-W_K)$ abgewartet wird, wird im Mittel ebenfalls die Menge $W_K \cdot m_{Am}$ verkauft, bei einer dritten Begegnung, deren Wahrscheinlichkeit $(1-W_K)^2$ ist, wieder die gleiche Menge usw. Bei einer *Anbieterreichweite* r ist die über viele Perioden gemittelte Kaufmenge die Summe der Produkte der Wahrscheinlichkeit $(1-W_K)^j$ einer j-ten Begegnung und der mittleren Kaufmenge pro Begegnung $W_K \cdot m_{Am}$:

$$m_{Km}(r) \;=\; \sum_{j=1}^{r} (1-W_K)^{j-1} \cdot W_K \cdot m_{Am} = (1-(1-W_K)^r) \cdot m_{Am} \qquad . \qquad (64)$$

Wenn der Anbieter den Markt nicht vorzeitig verlässt, ist die Anbietereichweite gleich der Anzahl der Nachfrager, die in der Periode auf den Markt kommen, also $r = \lambda_N$. Dann ergibt sich der *Kaufmengenstrom bei maximaler Anbieterreichweite*:

$$\Lambda_K \;=\; (1-(1-W_K)^{\lambda N}) \cdot m_{Am} \qquad \text{wenn } m_{Am} < m_N \;. \qquad (65)$$

Im Fall $m_{Am} > m_{N,}$ wenn also die Monopolangebotsmenge größer ist als die einzelnen Nachfragemengen, gilt $MIN(m_N;m_{Am}) = m_N$. Dann ist die mittlere Kaufmenge einer Begegnung, also das Integral (63), gleich der mittleren effektiven Nachfragemenge. Für eine faktorisierende Nachfragerverhaltensdichte (14) ist die mittlere Nachfragemenge unabhängig vom Preis und daher die effektive mittlere Nachfragemenge gleich der mittleren Nachfragemenge und die mittlere Einzelkaufmenge gleich der mittleren Nachfragemenge, d.h. $m_{Km} = m_{Nm}$.

Jede Begegnung mit einem Nachfrager führt mit der Wahrscheinlichkeit W_K zur Kaufmenge m_{Nm} und ergibt im Mittel die Kaufmenge $W_K \cdot m_{Nm}$. Bei maximaler Reichweite des Monopolanbieters, also nach $r = \lambda_N$ Begegnungen, resultiert daraus der Mengenstrom $\Lambda_K = \lambda_N \cdot W_K \cdot m_{Nm} = \Lambda_{Neff}$, der gleich dem effektiven Nachfragemengenstrom (26), also gleich der Preisnachfragefunktion (12) beim Monopolpreis $p_K = p_{Am}$ ist, d.h. $\Lambda_{Neff} = \Lambda_N(p_{Am})$. Wenn der Kaufmengenstrom nach weniger als λ_N Begegnungen die periodische Angebotsmenge $\Lambda_A = m_{Am}$ erreicht, verlässt der Anbieter vorzeitig den Markt, da er seine Angebotsmenge verkauft hat. Daher gilt für den *Kaufmengenstrom bei maximaler Anbieterreichweite*:

$$\Lambda_K = MIN(\lambda_A \cdot m_{Am};\, W_K \cdot \lambda_N \cdot m_{Nm}) = MIN(\Lambda_A;\, \Lambda_{Neff}) \qquad \text{wenn } m_{Am} > m_N \,. \qquad (66)$$

Der Kaufmengenstrom ist der Marktabsatz in der betrachteten Periode. Damit folgt aus (66) das allgemeine *Marktabsatzgesetz für Angebotsmonopole*:

- Marktabsatz und Absatzfunktion des Monopolanbieters sind gleich der Preisnachfragefunktion und nach oben durch den effektiven Nachfragemengenstrom begrenzt.

Aus diesem Grund ist es grundsätzlich möglich, die Preisnachfragefunktion eines Wirtschaftsguts auf einem Monopolangebotsmarkt experimentell zu bestimmen, auch wenn das wegen der Gefahren für das Geschäft in der Praxis nur schwer durchführbar ist.

Für den mittleren Kaufpreis der einzelnen Begegnungen, d.h. für den Marktpreis ergibt sich nach Einsetzen der Kaufwahrscheinlichkeitsdichte (61) und der Preisbildungsfunktion (35) in das Kaufpreisintegral (52):

$$p_{Km} \;=\; P_M \;=\; \beta \cdot p_{Neff} + (1-\beta) \cdot p_{Am} \qquad (67)$$

Der mittlere Einzelkaufpreis p_{Km} ist gleich dem Marktpreis P_M. Damit folgt aus Beziehung (67) das *Marktpreisgesetz für Angebotsmonomole*:

- Für einen Anbieterfestpreis ($\beta = 0$) ist der Marktpreis gleich dem Monopolangebotsgrenzpreis, für Nachfragerfestpreise ($\beta = 1$) ist der Marktpreis gleich dem mittleren effektiven Nachfragergrenzpreis und für Verhandlungspreise ist der Marktpreis der mit dem Preisbildungsparameter β gewichtete Mittelwert (67) von Monopolangebotsgrenzpreis und mittlerem effektiven Nachfragergrenzpreis.

Der Anbieterfestpreis ist unabhängig davon, in welcher Reihenfolge die einzelnen Nachfrager auf den Markt kommen. Für $\Lambda_A \leq \Lambda_{Neff}$ ist auch der durch (28) gegebene mittlere effektive Nachfragergrenzpreis unabhängig von der Preisfolge, in der die Nachfrager eintreffen, da die gesamte effektive Nachfrage zum Kauf kommt. Für $\Lambda_A > \Lambda_{Neff}$ gilt Beziehung (28) nur, wenn die Nachfrager in zufälliger Preisfolge eintreffen, da sich dann die Nachfragerverhaltensdichte im Verlauf der Periode nicht ändert. Bei steigender oder fallender Grenzpreisfolge ist die Nachfragerverhaltensdichte der zuerst kommenden Nachfrager anders als die Verhaltensdichte der später eintreffenden Nachfrager. Die Berechnung der entsprechenden Verhaltensdichten und mittleren effektiven Nachfragergrenzpreise für steigende und fallende Nachfragerpreisfolge ist eine noch ungelöste Aufgabe.

Für $\Lambda_A \leq \Lambda_{Neff}$ und beliebig verteilte Nachfrager sowie für $\Lambda_A > \Lambda_{Neff}$ und zufällig verteilte Nachfrager mit der Standarddichtefunktion (15) sind der mittlere effektive Nachfragepreis und dessen Varianz durch die Beziehungen (28) und (29) gegeben. Für die Marktkonstellation *Abb. 6* mit $n = 0$ errechnet sich bei Anbieterfestpreisen (AP) der Marktpreis 10 ± 0 GE/ME, der gleich dem Monopolangebotspreis ist, und für Nachfragerfestpreise (NP) mit (28) der Marktpreis $11 \pm 0{,}2$ GE/ME. Beide Werte, ebenso wie die Zwischenwerte für Verhandlungspreise, werden durch die Simulationsrechnungen mit den gleichen Marktparametern bestens bestätigt. Das gilt auch für den Marktabsatz, für den aus Beziehung (66) für die Marktkonstellation unabhängig von der Preisbildungsart der Wert 22,5 + 3,4 ME/PE folgt, der ebenfalls durch die Simulationsergebnisse bestätigt wird [Gudehus 2007, S.188].

Anbieterauswahl nach steigendem Angebotspreis

Auf vielen Märkten trifft ein zufälliger Strom λ_N von Nachfragern N mit der Nachfragerverhaltensdichte $w_N(p_N;m_N)$ einen periodisch wiederkehrenden Strom von $\lambda_N = N_A$ Anbietern Aj, $j = 1,2..N_A$, die solange auf dem Markt bleiben, bis sie ihre Angebotsmengen m_{Aj} verkauft haben oder die Marktperiode endet. Ökonomisch handelnde Nachfrager besuchen zuerst den preisgünstigsten Anbieter, bis dieser ausverkauft ist, danach den zweitgünstigsten Anbieter und so fort, bis alle Nachfrager ihren Bedarf gedeckt haben oder bis alle Anbieter ausverkauft sind. Wenn jeder Anbieter mit der Menge m_{Aj} und dem Angebotsgrenzpreis p_{Aj} nur einmal pro Periode auf den Markt kommt, ist die Angebotsverhaltensdichte eine Summe von Produkten der partiellen Dirac-Funktionen $\delta(p-p_{Aj})$ und $\delta(p-m_{Aj})$ mit der für alle gleichen Punktwahrscheinlichkeit $w_j = 1/N_A$. Die Preisangebotsfunktion $W_A(p)$ ist dann eine steigende Stufenfunktion [Gudehus 2007, *Abb. 7.1*].

Wegen des ungelösten methodischen Problems, die unterschiedlichen Reichweiten und Reihenfolgen der Nachfrager richtig zu berücksichtigen, ist eine allgemeine Berechnung der Marktergebnisse bisher noch nicht gelungen. Für Märkte, auf denen *zufallsverteilt* ankommende Nachfrager mit maximaler Reichweite $r_N = N_A$ die $N_A = \lambda_A$ Anbieter, deren Angebotsmengen größer sind als die mittlere Nachfragemenge, $n_{Aj} > m_{Nm}$, nach *steigenden Grenz-*

preisen $p_{A1}<p_{A2}<...p_{Aj}< \dots<p_{AN}$ aufsuchen, läßt sich die Berechnung der Marktergebnisse jedoch zurückführen auf die vorangehenden Marktergebnisse für Monopolanbieter.

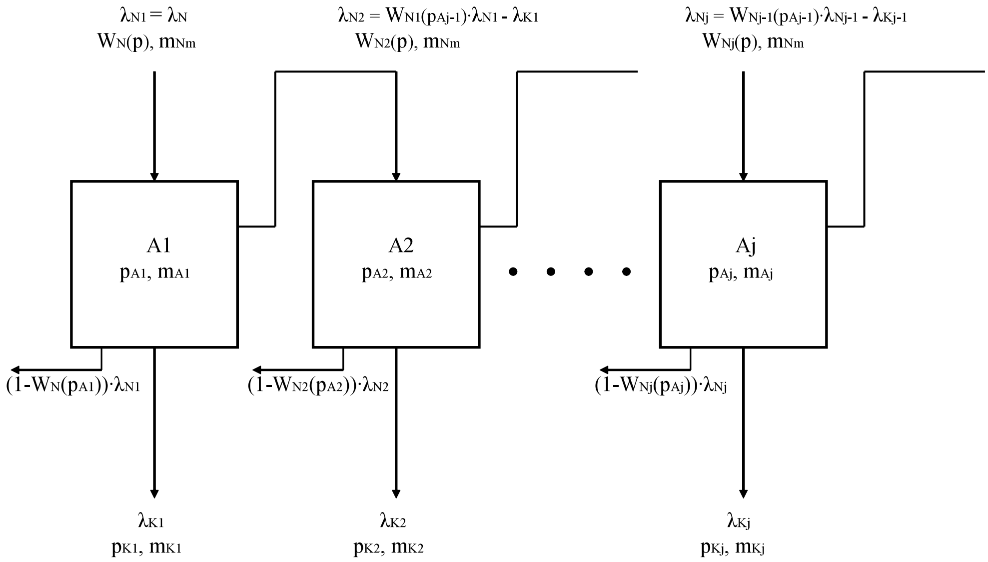

Abb. 7 Nachfragerstrom trifft Anbieter nach steigenden Grenzpreisen

Wie in *Abb. 7* dargestellt, trifft der Nachfragerstrom $\lambda_N = \lambda_{N1}$ zuerst den Anbieter A1 mit dem kleinsten Grenzpreis p_{A1}. Dieser ist solange Monopolanbieter, bis er nach Ausverkauf seiner Periodenmenge m_{A1} den Markt verlässt oder bei geringem Bedarf zum Ende der Periode $\lambda_{K1} = W_N(p_{A1})\cdot\lambda_N$ Verkäufe mit der Menge m_{Nm} ausgeführt hat. Damit verlässt nach Besuch von A1 ein mittlerer Käuferstrom $\lambda_{K1} = W_N(p_{A1})\cdot\lambda_{N1}$ den Markt. Mit ihnen läuft der Kaufmengenstrom $\Lambda_{K1} = \mathrm{MIN}(m_{A1}; W_N(p_{A1})\cdot\lambda_{N1}\cdot m_{Nm})$ aus dem Markt. Außer den Käufern scheiden im Mittel $(1\text{-}W_N(p_{A1}))\cdot\lambda_{N1}$ Nachfrager aus, die erkennen, daß sie wegen zu geringer Zahlungsbereitschaft, also wegen $p_N < p_{A1}$, bei keinem weiteren Anbieter Kaufchancen haben.

Übrig bleibt der Nachfragerstrom $\lambda_{N2} = W_N(p_{A1})\cdot\lambda_{N1}\text{-}\lambda_{K1}$, der den Anbieter A2 mit dem nächst höheren Grenzpreis p_{A2} aufsucht. Die erfolglos ausgeschiedenen Nachfrager reduzieren die Preisnachfragewahrscheinlichkeit des Nachfragerstroms λ_{N2} auf $W_{N2}(p_K) = W_N(p_K)/W_N(p_{A1})$. Nach Besuch von A2 verlässt im Mittel der Käuferstrom $\lambda_{K2} = W_{N2}(p_{A2})\cdot\lambda_{N2}$ mit dem Kaufmengenstrom $\Lambda_{K2} = \mathrm{MIN}(m_{A2}; W_{N2}(p_{A2})\cdot\lambda_{N2}\cdot m_{Nm})$ den Markt. Der restliche Nachfragerstrom $\lambda_{N3} = \lambda_{N2}\cdot W_{N2}(p_{A2})\text{-}\lambda_{K2}$ besucht den drittgünstigsten Anbieter, und so weiter bis hin zum Anbieter mit dem höchsten Preis. Aus den Begegnungen mit den Anbietern nach steigenden Preisen p_{Aj} ergeben sich damit die einlaufenden Nachfragerströme:

$$\lambda_{Nj} = \mathrm{WENN}(j=1; \lambda_N; W_{Nj-1}(p_{Aj-1})\cdot\lambda_{Nj-1} - \lambda_{Kj-1}) \quad . \qquad (68)$$

Diese führen zu den *partiellen Käuferströmen*

$$\lambda_{Kj} = W_{Nj}(p_{Aj})\cdot\lambda_{Nj} \qquad (69)$$

mit den *partiellen Kaufmengenströmen*

$$\Lambda_{Kj} = \mathrm{MIN}(m_{Aj}, W_{Nj}(p_{Aj})\cdot\lambda_{Nj}\cdot m_{Nm}). \quad . \qquad (70)$$

Infolge des sukzessiven Ausscheidens von Nachfragern mit unzureichender Zahlungsbereitschaft müssen die partiellen Kaufmengen und Kaufpreise mit den auf 1 normierten effektiven Verhaltensdichten berechnet werden (s. Beziehung (25)). In die Gleichungen (68) bis (70) ist die *Wahrscheinlichkeit der effektiven Nachfrage* bezüglich des jeweils letzten Anbietergrenzpreises p_{Aj-1} einzusetzen:

$$W_{Nj}(p_{Aj}) \;=\; \mathrm{WENN}(j=1;\, W_N(p_{Aj});\, W_N(p_{Aj})/W_N(p_{Aj-1})\,) \tag{71}$$

Der *Markabsatz* ist die Summe aller partiellen Kaufmengenströme (70)

$$\Lambda_M \;=\; \sum_{j=1}^{NA} \Lambda_{Kj} \tag{72}$$

Der *Marktpreis* ist der mengengewichtete Mittelwert

$$P_M \;=\; \sum_{j=1}^{NA} p_{Kj}\cdot\Lambda_{Kj} \,/\, \Lambda_M \quad . \tag{73}$$

der partiellen Kaufpreise

$$p_{Kj} \;=\; \beta\cdot p_{Nm\,eff} + (1-\beta)\cdot p_{Aj}(p_{Aj}) \quad . \tag{74}$$

Auf einem Markt mit Anbieterfestpreisen ($\beta=0$) sind die partiellen Kaufpreise die Angebotsgrenzpreise p_{Aj} der einzelnen Anbieter. Bei Nachfragergrenzpreisen ($\beta=1$) sind sie gleich den effektiven mittleren Nachfragerfestpreisen $p_{Nm\,eff}(p_{Aj})$ ab dem jeweiligen Angebotsgrenzpreis p_{Aj}. Für die Standarddichte (15) mit dem Parameter n folgt bei $p_{Nu} < p_{Ai}$ aus Beziehung (28):

$$p_{Nm\,eff}(p_{Aj}) = \;((n+1)\cdot p_{Aj}+p_{No})/(n+2) \quad . \tag{75}$$

Mit den Formeln (68) bis (71) lassen sich für unterschiedliche Parameterwerte sukzessive die partiellen Kaufergebnisse und aus diesen mit den Beziehungen (72) und (73) der Marktabsatz und der Marktpreis berechnen. Für die in *Tabelle 1* spezifizierte Anfangskonstellation ergeben sich auf diese Weise die in *Abb. 8* und *9* dargestellten Abhängigkeiten des Marktpreises und des Marktabsatzes von der mittleren Zahlungsbereitschaft p_{Nm} der Nachfrager.

Die Simulationsergebnisse stimmen mit den theoretischen Vorhersagen ausgezeichnet überein. Das gilt auch für andere Preisbildungsarten sowie für die Abhängigkeit der Marktergebnisse vom mittleren Angebotspreis, von der Gesamtnachfrage, vom Gesamtangebot und von anderen Parametern [s Gudehus 2007, *Abb. 12.6* bis *12.13*]. Damit ist die Allgemeingültigkeit der Gesetzmäßigkeiten und Erkenntnisse bewiesen, die mit Hilfe der Simulationsrechnungen hergeleitet wurden. Ein zentrales Ergebnis ist die Aussage (s. *Abb. 5*):

- Marktpreis und Marktabsatz sind in der Regel weder im dynamischen noch im stationären Zustand durch den Kreuzungspunkt von Nachfragefunktion und Angebotsfunktion gegeben.

Die Kreuzungswerte gelten nur für *Monopolmärkte*, auf denen der Kaufpreis gleich dem Monopolpreis ist, sowie für *Vermittlungsmärkte*, auf denen eine Vermittlungsinstanz wie ein *Walras-Auktionator* einen einheitlichen Kaufpreis so festlegt, daß der Absatz maximal ist [Walras 1894].

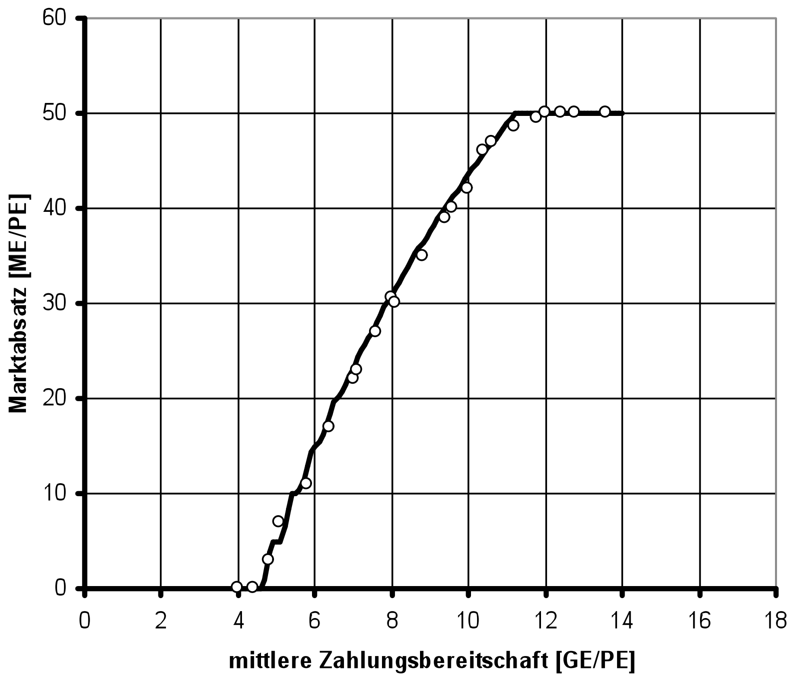

Abb. 8 Abhängigkeit des Marktabsatzes von der mittleren Zahlungsbereitschaft

Kurve: Theorie *Punkte*: Simulation
Parameter: Standardmarktkonstellation *Tabelle 1*

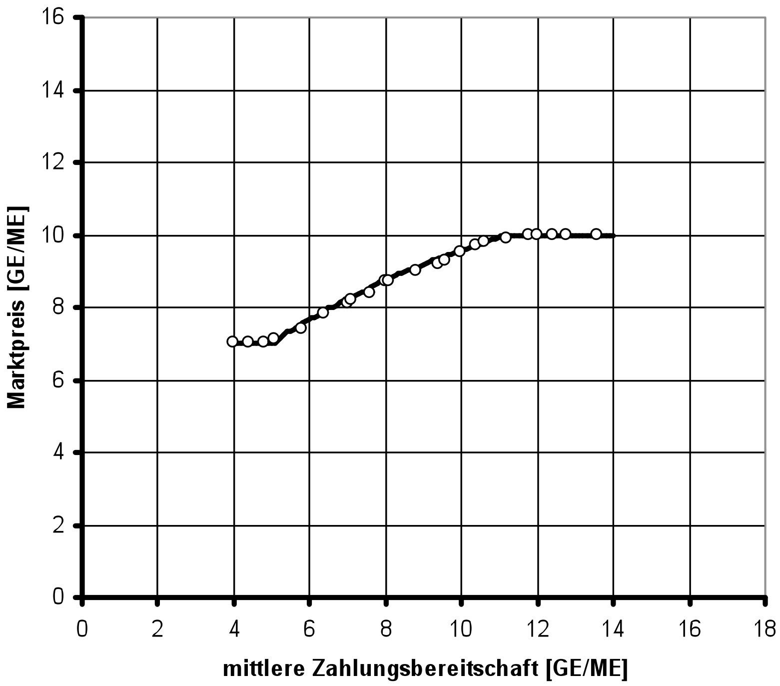

Abb. 9 Abhängigkeit des Marktpreises von der mittleren Zahlungsbereitschaft

Preisbildung: Anbieterfestpreise (β=0)
Parameter: Standardmarktkonstellation *Tabelle 1*

Verteilung von Kaufmengen und Absatz

Der prozentuale Anteil des effektiven Nachfragemengenstroms $\Lambda_{Neff}(p_N)$ der Nachfrager mit Grenzpreisen von p_{Au} bis p_N am effektiven Gesamtnachfragemengenstrom (26) ist gleich dem Quotienten

$$a_N(p_N) = \Lambda_{Neff}(p_N)/\Lambda_{Neff} \quad [\%] \qquad (76)$$

Der prozentuale Anteil des Kaufmengenstroms $\Lambda_{KN}(p_N)$ der effektiven Nachfrager mit Grenzpreisen von p_{Au} bis p_N an der Gesamtkaufmenge Λ_K ist der Quotient

$$a_{KN}(p_N) = \Lambda_{KN}(p_N)/\Lambda_K \quad [\%] \quad . \qquad (77)$$

Die Abhängigkeit der beiden Mengenanteile $a_{KN}(p_N)$ und $a_N(p_N)$ vom Grenzpreis p_N ist die implizite Lorenzfunktion der Kaufmengenverteilung auf die Nachfrager mit ansteigendem Nachfragegrenzpreis. Aus der Auflösung von Beziehung (76) nach p_N folgt die *Umkehrfunktion* $p_N = a_N^{-1}$ und durch Einsetzen in Beziehung (77) die explizite Lorenzfunktion $a_{KN}(a_N^{-1})$.

Für die in *Abb. 5* dargestellte Marktkonstellation mit linearer Nachfrage- und Angebotsfunktion und preisunabhängigen Nachfragemengen ergibt die Lösung der entsprechenden Integrale den prozentualen Anteil des effektiven Nachfragemengenstroms am effektiven Gesamtnachfragemengenstrom:

$$a_N(p_N) = (p_{No}-p_N)/(p_{No}-p_{Au}) \quad [\%] \qquad (78)$$

Für die gleiche Marktkonstellation mit preisunabhängigen Kaufmengen folgt bei *einmaliger Begegnung* der Akteure für den prozentualen Kaufmengenanteil der Nachfrager mit Grenzpreisen von p_{Au} bis p_N:

$$a_{KN}(p_N) = ((p_{No}-p_N)/(p_{No}-p_{Au}))^2 \quad [\%] \, . \qquad (79)$$

Damit wird die *Lorenzfunktion der Kaufmengenverteilung* auf die Nachfrager nach aufsteigendem Nachfragergrenzpreis:

$$a_{KN} = (a_{Neff})^2 \quad [\%] \qquad (80)$$

Analog ergibt sich für die *Lorenzfunktion der Absatzmengenverteilung* auf die effektiven Anbieter nach von p_A bis p_{No} aufsteigendem Angebotsgrenzpreisen für den Fall der einmaligen Begegnung mit linearen Nachfrage- und Angebotsfunktionen und preisunabhängigen Kaufmengen:

$$a_{KA} = (1 - a_{Aeff})^2 \quad [\%] \qquad (81)$$

Der Verlauf der beiden speziellen Lösungen (80) und (81) der Lorenzverteilung des Gesamtkaufmengenstroms auf die effektiven Nachfrager und die effektiven Anbieter zeigt *Abb. 10*. Daraus sind folgende *Verteilungswirkungen des Marktes* ablesbar:

- Der Markt bewirkt eine *Ungleichverteilung der Kaufmengen* zugunsten der effektiven Nachfrager mit der höheren Zahlungsbereitschaft und eine *Ungleichverteilung des Absatzes* zugunsten der effektiven Anbieter mit den geringeren Angebotsgrenzpreisen.

Wenn außer den effektiven Akteuren mit Kaufchancen auch die ineffektiven Akteure ohne Kaufchancen bei der Verteilungsberechnung berücksichtigt werden, ergibt sich in der Regel eine wesentlich stärkere Schiefverteilung, denn die Nachfrager mit Grenzpreisen kleiner p_{Au} haben keinen Anteil an der Gesamtkaufmenge und die Anbieter mit Grenzpreisen über p_{No} keinen Anteil am Gesamtabsatz.

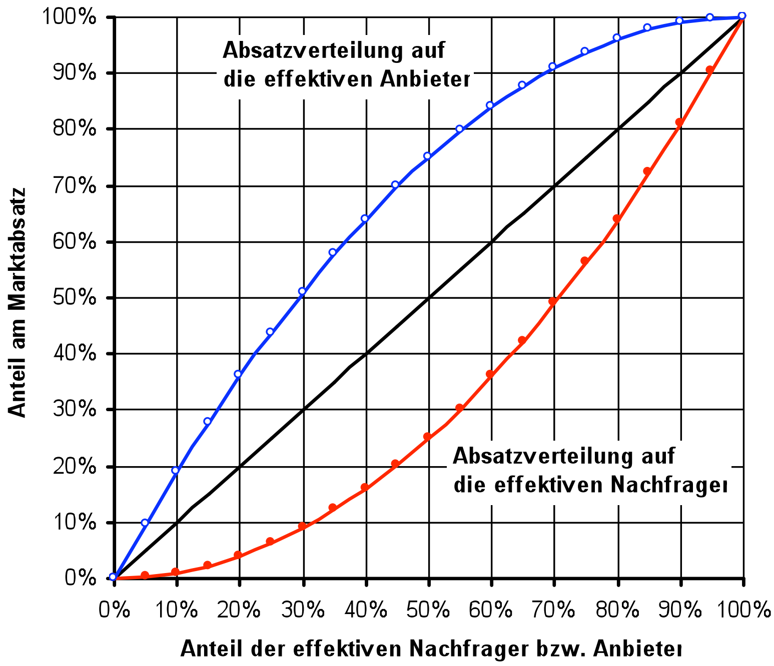

Abb. 10 Lorenzverteilungen des Gesamtabsatzes auf die effektiven Nachfrager und auf die effektiven Anbieter

Parameter: Standardmarktkonstellation *Tabelle 1*

Die Berechnung der Lorenzverteilungen für nichtlineare Nachfrage- und Angebotsfunktionen sowie für Märkte mit Mehrfachbegegnungen nach unterschiedlichen Auswahlkriterien ist ein ungelöstes Problem. Noch schwieriger als die Berechnung der Lorenzverteilungen des Absatzes ist die Lösung für die Lorenzverteilungen von Umsatz und Marktgewinnen auf die Nachfrager und die Anbieter. Die Simulationsrechnungen zeigen jedoch, daß sich die *Schiefverteilungswirkung* des Marktes auf Absatz, Umsatz und Gewinn bei mehrfacher Begegnung der Akteure verstärkt. Sie ist außerdem von der Art der Preisbildung, der Reihenfolge der Begegnung und der Anzahl der Akteure abhängig [Gudehus 2007, *Abschnitt 13.3* und *13.4*).

Ungelöste Probleme

In der Wahrscheinlichkeitstheorie des Marktes wird das Marktgeschehen als *strategisches Zufallsspiel* betrachtet, dessen *Spielregeln* die Teilnehmer miteinander vereinbart haben oder von einer externen *Marktordnung* festgelegt sind. Bei wenigen Akteuren mit diskreten Grenzpreisen sind die Zufallseinflüsse gering und die Marktergebnisse vor allem vom strategischen Verhalten der Akteure abhängig, das sich mit Hilfe der *Spieltheorie* untersuchen läßt [Neumann/Morgenstern 1944; Peters 2002; Fudenberg/Tirole 2002]. Bei einer großen Anzahl unabhängiger Nachfrager und Anbieter mit unterschiedlicher Reichweite, zufallsverteilten Grenzpreisen und zeitlich veränderlichem Verhalten bestimmen Zufallseinflüsse und das wahrscheinliche Verhalten der Nachfrager- und Anbieterkollektive zunehmend die Marktergebnisse. Diese lassen sich, wie in diesem Beitrag gezeigt wurde, grundsätzlich nach Verfahren der *Wahrscheinlichkeitstheorie* berechnen. Die Modelllösungen und Beispiele zeigen jedoch, daß sich bei der Berechnung der Marktergebnisse mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie rasch komplexe Probleme ergeben.

Analog zum Angebotsmonopol lassen sich explizite Berechnungsformeln für die Ergebnisse eines Marktes mit einem *Nachfragermonopol* herleiten, auf den ein zufällig verteilter Strom von Anbietern kommt. Ähnlich wie Marktabsatz und Marktpreise für die Auswahl nach steigenden Anbieterpreisen können auch die Marktergebnisse für die Anbieterauswahl nach fallenden Preisen sowie für die Auswahl der Nachfrager durch die Anbieter nach fallenden oder steigenden Nachfragerpreisen berechnet werden. Für Märkte, auf denen Nachfrager oder/und Anbieter nach steigenden oder fallenden Preisen oder nach anderen Kriterien, wie die Qualität, geordnet eintreffen, fehlen bislang entsprechende Lösungen für die Marktergebnisse.

Für die *Mikroökonomie* sind die Marktergebnisse für *stochastisch-dynamische Märkte* besonders interessant, auf denen ein Zufallsstrom von Nachfragern mit einem Zufallsstrom von Anbietern zusammentrifft. Eine solche Konstellation ist auf *Börsen* und *Finanzmärkten* zu finden, wo die eingehenden Aufträge der Nachfrager und Anbieter einer Vermittlungsinstanz mitgeteilt werden. Daher sind für diese Märkte die Zulaufströme λ_N [N/PE] und λ_A [A/PE] sowie bei längere Zeit stationärem Markt auch die Verhaltensdichten $w_N(p_N;m_N;t)$ und $w_A(p_A;m_A;t)$ bekannt. Auch die Reichweiten sind bekannt, da die Akteure in der Regel vorschreiben, wie lange ein Kauf- oder Verkaufsauftrag gelten soll.

Für die *Makroökonomie* von besonderer Bedeutung sind die Rückkopplungseffekte der Marktergebnisse der Vergangenheit auf die Erwartungen und das aktuelle Marktverhalten der Akteure. Solche Rückkopplungen lassen sich durch Einführung zeitabhängiger Ströme und Verhaltensdichten mathematisch erfassen, deren Parameter Funktionen der Marktergebnisse $P_M(t'<t)$ und $\Lambda_K(t'< t)$ früherer Perioden $t'< t$ sind. Für die Lösung der daraus resultierenden Differential- und Integralgleichungen fehlen jedoch die mathematischen Verfahren.

Bis es gelingt mathematisch exakte Lösungen zu finden, bleibt nur das Verfahren der *digitalen Simulation* mit Hilfe eines Marktsimulationsprogramms für stochastisch-dynamische Märkte. Durch Simulation lassen sich wesentlich einfacher als mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Verfahren die kollektiven und individuellen Marktergebnisse berechnen, die Auswirkungen von *Verhaltensänderungen* der Akteure studieren, unterschiedliche Qualitäten berücksichtigen sowie *Absatz-, Beschaffungs- und Handelsstrategien* testen (s. [Gudehus 2007 *Abschnitt 14.6*]).

Die Entwicklung mathematischer Lösungsverfahren, die Berechnung weiterer Marktergebnisse, wie Gewinne, Volatilitäten und Verteilungen, die Herleitung von *Näherungsformeln* wie auch die Behandlung von *Warteschlangeneffekten* [Ferschl 1964] sind Herausforderungen für die mathematische Wirtschaftsforschung. Von grundsätzlicher Bedeutung für die Wirtschaftstheorie sind der Beweis allgemeiner *Marktgesetze*, wie die *Verteilungswirkung des Marktes* oder das *Superpositionsprinzip für verhaltensgemischte Märkte*, und die Entwicklung allgemein anwendbarer *Analyseverfahren*, wie die *komparativ-statische Analyse* und die *Wirkungskettenanalyse* [Gudehus 2007; Schneider 1969].

Literatur

Bauer H. (1991); Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, 4. Auflage, DeGruyter, Berlin

Dirac P.A.M. (1947); The Principles of Quantum Mechanics; 3rd ed., University Press, Oxford, p. 58ff

Fudenberg D., Tirole J. (2002); Game Theory, MIT Press, Cambridge/MA

Ferschl F. (1964); Zufallsabhängige Wirtschaftsprozesse, Physica-Verlag, Wien-Würzburg

Georgiii (2004); Stochastik, DeGruyter, Berlin

Gudehus T. (2007); Dynamische Märkte, Praxis, Strategien und Nutzen für Wirtschaft und Gesellschaft, Springer, Berlin-Heidelberg-New York

Kreyszig E. (1975); Statistische Methoden und ihre Anwendungen, 5. Aufl., Vandenhoeck& Ruprecht, Göttingen

Mankiw N.G. (2003); Makroökonomik, s. 8 ff., Schaefer-Poeschel, Stuttgart, 5. Auflage

Neumann v. J., Morgenstern O. (1944); Theory of Games and Economic Behaviour, 3rd ed. University Press, Princeton

Peters R. (2002); Elektronische Märkte, Spieltheoretische Konzeption und agentenorientierte Realisierung, Physica-Verlag, Heidelberg

Ruffieux B. (2004); Märkte im Labor, Spektrum der Wissenschaft, Mai 2004, S. 60-68

Samuelson P.A., Nordhaus W.D. (1995), Economics, New York, Deutsche Übersetzung der 15. Auflage von R. und H. Berger, Volkswirtschaftslehre, Ueberreuter, Wien/Frankfurt, 1998

Schneider E. (1969); Einführung in die Wirtschaftstheorie, 2. Teil: Wirtschaftsgüter und wirtschaftliches Gleichgewicht in der Verkehrswirtschaft, 14. Aufl., J.C.P. Mohr (Paul Siebeck), Tübingen, s. insbesondere S. 431 ff

Varian H. R. (1993); Intermediate Microeconomics, Norton, New York

Walras L. (1894), Elément d'economique pure ou théorie tichesse social, Paris

Wöhe G. (2000), Einführung in die allgemeine Betriebswirtschaftslehre, 1960, Vahlen, Berlin und Frankfurt, 20. Auflage, S. 564: „Die Preisoptimierungsregeln der klassischen Preistheorie finden nur selten Eingang in die Marketing-Praxis. Der Grund liegt auf der Hand: Die modellmäßigen Annahmen sind größtenteils wirklichkeitsfremd“

Der Verfasser dankt *Dipl. math. Karl Schomerus* für hilfreiche Diskussionen zur Wahrscheinlichkeitstheorie, wertvolle Korrekturen und die kritische Durchsicht des Manuskripts.